БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.

2. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.

3. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* // ДАН. 1998. Т. 358, № 3. С. 298 – 301.

УДК 517.5

А. Л. Лукашов

ОБ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ*

Известно [1], что информационная энтропия Больцмана-Шеннона квантовомеханических систем может быть в ряде случаев выражена в терминах информационной энтропии классических ортогональных многочленов. Дадим

Определение. Информационной энтропией многочленов $q_n(x)$, ортонормальных по отношению к весу $\rho(x)$, называется величина

$$S_n = -\int q_n^2(x) \ln q_n^2(x) \rho(x) dx.$$

В настоящее время появилось много работ, в которых изучаются асимптотики этих величин на конечном или бесконечном интервале [2,3], но лишь в нескольких случаях (для многочленов Чебышева первого и второго рода [1]) найдены точные значения этих величин. Приведем один такой результат.

ТЕОРЕМА 1. [1]. Если $q_n(x)$ – ортогональные многочлены Чебышева первого рода (относительно веса $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$), то при $n \geq 1$

$$S_n = \pi(\ln 2 - 1). \tag{1}$$

Заметим, что вес $\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ совпадает с плотностью равновесной меры отрезка $[-1;\ 1]$ [4]. Кроме того, нам не встретилось ни одной работы, посвященной вычислению информационных энтропий для многочленов, ортонормированных на несвязных множествах.

Цель данной статьи – сообщить о довольно любопытном обобщении теоремы 1 на случай нескольких отрезков. Ортогональным многочленам на нескольких отрезках посвящено большое количество работ (см., напр., об-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

зор [5], а также недавние работы [6,7]). Наиболее естественные обобщения свойств многочленов Чебышева наблюдались в случае, когда на системе из нескольких отрезков существует многочлен, наименее уклоняющийся от нуля с максимально возможным числом точек уклонения. В терминах равновесных мер этот случай характеризуется тем, что равновесные меры каждого из отрезков, составляющих систему, – рациональные числа (см., напр., обзор [7]).

ТЕОРЕМА 2. Если $q_n(x)$ – многочлены, ортонормальные относительно плотности равновесной меры $\mu_E(x)$ системы отрезков $E=[a_1,a_2]\cup\ldots\cup[a_{2l-1},a_{2l}]$, и равновесные меры каждого из отрезков $[a_{2j-1},a_{2j}]$ – рациональные числа вида $\frac{m_j}{N}$, то при всех $n=kN$, где k – натуральное, для информационной энтропии S_n многочленов q_n(при $\rho(x)=\mu_E(x)$) имеет место формула $S_n=\ln 2-1$.

Доказательство. Известно (см., напр., [6]), что плотность равновесной меры $\mu_E(x)$ имеет вид $\mu_E(x)=\frac{1}{\pi}\frac{|u(x)|}{\sqrt{-H(x)}}\chi_E(x)$, где $u(x)$ – полином степени $l-1$ со старшим коэффициентом 1, однозначно определяемый равенствами $\int\limits_{a_{2j}}^{a_{2j+1}}\frac{u(x)}{\sqrt{-H(x)}}dx=0,\ j=1,\ldots l-1;$ $H(x)=\prod\limits_{j=1}^{2l}(x-a_j)\chi_E(x)$ – характеристическая функция множества E.

Далее, из результатов работы [9] следует, что при выполнении условий теоремы многочлены $T_{n,E}(x)$, наименее уклоняющиеся от нуля на E, являются ортогональными многочленами степени не выше $n+l-2$ со знакочередующимся весом

$$h(x)=(-1)^j\frac{1}{\sqrt{-H(x)}},\ \text{для}\ x\in(a_{2j-1},a_{2j}),\ j=1,\ldots,l.$$

Но тогда, очевидно, они будут ортогональны многочленам степени $n-1$ с весом $\mu_E(x)$, то есть совпадут с точностью до постоянного множителя с многочленами $q_n(x)$. Несложный подсчёт с использованием представлений многочленов $T_{n,E}(x)$ из [9] даёт представление

$$q_n(x)=\sqrt{2}\cos n\pi\int\limits_{a_1}^{x}\mu_E(x)dx.$$

Кроме того, $q_n(x)$ удовлетворяют тождеству Абеля-Пелля

$$\frac{q_n^{\,2}(x)}{2}-Q_{n-l}^{\,2}(x)H(x)=1 \tag{2}$$

для некоторого полинома Q_{n-l} степени $n-l$.

Тогда $q_n'(x) = -\sqrt{2}nQ_{n-1}(x)|u(x)|$, $\left(Q_{n-1}(x)\sqrt{-H(x)}\right)' = \frac{n\pi}{\sqrt{2}}q_n(x)\mu_E(x)$,

а отсюда и из тождества (2) получаем

$$S_n = -\frac{1}{\pi}\int q_n{}^2(x)\ln q_n{}^2(x)\frac{|u(x)|}{\sqrt{-H(x)}}dx = -\frac{2}{\pi}\int_E \frac{|u(x)|\ln q_n{}^2(x)}{\sqrt{-H(x)}}dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_E \frac{|u(x)|q_n{}^2(x)\ln q_n{}^2(x)}{\sqrt{-H(x)}}dx - \frac{4}{\pi}\int_E Q_{n-1}{}^2(x)\sqrt{-H(x)}|u(x)|dx =$$

$$= -2\int_E \ln q_n{}^2(x)\mu_E(x)dx - S_n - \frac{4}{\pi}\int_E \frac{|u(x)|}{\sqrt{-H(x)}}dx + \frac{2}{\pi}\int_E q_n{}^2(x)\frac{|u(x)|}{\sqrt{-H(x)}}dx.$$

Последний интеграл, в силу нормировки, равен 2, третий интеграл равен π, поскольку представляет собой равновесную меру всей системы отрезков E, умноженную на π, в первом интеграле можно сделать замену $\mu_E(x)dx = d\theta$ и воспользоваться формулой

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln|\cos n\theta|^2 d\theta = -2\ln 2,$$

что приводит к требуемому результату.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yáñez R.J., Van Assche W., Dehesa J.S.* Position and momentum information entropies of the D-dimesional harmonic oscillator and hydrogen atom // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 50. P. 3065 – 3079.

2. *Aptekarev A.I., Dehesa J.S., Yáñez R.J.* Spatial entropy of central potentials and strong asymptotics of orthogonal polynomials // J. Math. Phys. 1994. Vol. 35, № 9. P. 4423 – 4426.

3. *Buyarov V.S., Dehesa J.S., Martinez-Finkelshtein A., Saff E.B.* Asymptotics of the information entropy for Jacobi and Laguerre polynomials with varying weights // J. Approxim. Theory. 1999. Vol. 99. P. 153 – 166.

4. *Saff E.B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields. Berlin: Springer, 1997.

5. *Peherstorfer F.* Orthogonal and extremal polynomials on several intervals // J. Comp. Appl. Math. 1993. Vol. 48. P. 187 – 205.

6. *Lukashov A.L., Peherstorfer F.* Automorphic orthogonal and extremal polynomials // Canad. J. Math. 2003. Vol. 55. P. 576 – 608.

7. *Суетин С.П.* Об асимптотических свойствах диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 12. С. 105 – 135.

8. *Содин М.Л., Юдицкий П.М.* Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах вещественной оси // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, вып. 2. С. 1 – 61.

9. *Peherstorfer F.* On Bernstein – Szegő orthogonal polynomials on several intervals II : orthogonal polynomials with periodic recurrence coefficients // J. Approxim. Theory. 1999. Vol. 65. P. 123 – 161.