УДК 517.984

Д. С. Лукомский

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МАТРИЦЫ ВЕЙЛЯ-ЮРКО ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ*

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы вида

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x,\rho) y^{(k)} = 0, \quad P_k(x,\rho) = \sum_{i=k}^{n} \rho^{n-i} p_{ki}(x), \quad x \in (0,+\infty), \quad (1)$$

$$U_\xi(y) = y^{(n-\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{n-\xi} \rho^k u_{k\xi}(\rho) y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi}(\rho) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\beta_{k,k+1}^{(\xi)}}{\rho^i}.$$

Полагаем, что $p_{kk}, \beta_{k,k+1}^{(\xi)}$ – константы, $p_{ki}(x) \in L(0,\infty)$, $i = \overline{k+2,n}$. $p_{k,k+1}(x) \in W^1(0,\infty)$, $k = \overline{1,n-1}$, где $W^1(0,\infty)$ – множество функций $f(x)$ таких, что $f(x)$ абсолютно непрерывны и $f(x), f'(x) \in L(0,\infty)$, $p_{ki}(x) \in L(0,\infty)$, $i = \overline{k+2,n}$.

Пусть $\{R_k\}_{k=1}^n$ – корни характеристического уравнения

$$F(R) := \sum_{k=0}^{n} p_{kk} R^k = 0 \ \ (p_{nn} := 1).$$

Считаем, что $R_k - R_j \neq 0$, $k \neq j$ и $R_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$.

Известно, что комплексную ρ-плоскость можно разбить на конечное число секторов S_ν так, что в каждом из них корни $\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$ можно занумеровать следующим образом:

$$\mathrm{Re}(\rho R_1) < \mathrm{Re}(\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(\rho R_n) \quad \forall \rho \in S_\nu. \quad (2)$$

Пусть элементы вектор-функции $\Phi(x,\rho) = [\Phi_m(x,\rho)]^T{}_{m=\overline{1,n}}$ являются решениями (1) при условиях $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$ $(\xi = \overline{1,m})$, а также $\Phi_m(x,\rho) = O\left(e^{\rho R_m x + \alpha_m(x)}\right)$, где корни $\{R_m\}_{m=1}^n$ занумерованы в порядке (2), и

$$\alpha_m(x) = -\int_0^x \frac{\sum_{j=0}^{n-2} p_{j,j+1}(\xi) R_m^j \, d\xi}{F'(R_m)}.$$

Обозначим $M_{mk}(\rho) = U_k(\Phi_m)$, $k = \overline{m+1,n}$.

<u>Определение.</u> Функции $M_{mk}(\rho)$, $k = \overline{m+1,n}$ называются функциями Вейля-Юрко, а матрица $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$, $M_{mk}(\rho) = \delta_{mk}$, $k = \overline{1,m}$ называется матрицей Вейля-Юрко.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1) и Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).

Обозначим

$$\omega_\xi(R) = R^{n-\xi}\sum_{i=0}^{n-\xi}\frac{\beta_{ii}^{(\xi)}}{R_i}, \qquad \Omega(j_1,\dots,j_p) = \det(\omega_{j_\nu}(R_k))_{\nu,k=\overline{1,p}}.$$

Пусть для всех $p=\overline{1,n-1}$, $\Omega(\overline{1,p}) \neq 0$. Это условие должно выполняться для любого сектора S_ν с его собственной нумерацией корней $\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$.

В статье [1] были исследованы некоторые аналитические и структурные свойства матрицы Вейля-Юрко. Однако в [1] не удалось точно описать области регулярности и непрерывности функций Вейля-Юрко. В данной статье этот недостаток исправлен.

Пусть S_ν $\left(\nu=\overline{1,N}\right)$ – сектора, в которых выполнено неравенство (2), Γ_ν – луч, разделяющий два соседних сектора. Пусть при $\rho\in\Gamma_j$ выполнено условие

$$\mathrm{Re}(\rho R_1) < \dots < \mathrm{Re}(\rho R_{m_1}) = \dots = \mathrm{Re}(\rho R_{m_1+p_1}) < \dots$$
$$< \mathrm{Re}(\rho R_{m_s}) = \dots = \mathrm{Re}(\rho R_{m_s+p_s}) < \dots < \mathrm{Re}(\rho R_n).$$

Обозначим

$$N_j = \{m : m = \overline{m_1, m_1+p_1-1}, \dots, \overline{m_s, m_s+p_s-1}\},\ J_m = \{j : m \in N_j\},$$

$\gamma_m = \bigcup\limits_{j\in J_m}\Gamma_j$, $\Sigma_m = C\setminus\gamma_m$ – ρ-плоскость с разрезами вдоль лучей γ_m, $\overline{\Sigma_m}$ – замыкание Σ_m (берега разрезов различаются).

ТЕОРЕМА. Функции Вейля-Юрко $M_{mk}(\rho)$ при $k>m$ регулярны в Σ_m за исключением не более чем счётного, ограниченного множества полюсов Λ'_m и непрерывна в $\overline{\Sigma_m}$ за исключением ограниченного множества Λ_m. Точнее, при $j\in J_m$, $\rho\in\Gamma_j\setminus\Lambda_m$ существуют конечные пределы

$$M_{mk}^{\pm}(\rho) = \lim M_{mk}(z), \qquad z\to\rho, \qquad z\in\Sigma_m, \qquad \pm(\arg z - \Theta_j) > 0.$$

Доказательство теоремы основано на исследовании аналитических и асимптотических свойств фундаментальной системы решений типа Биркгофа уравнения (1), построенной в [2] и на свойствах матрицы Вейля-Юрко, исследованных в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лукомский Д.С.* О матрице Вейля для пучков дифференциальных операторов на полуоси // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 69 – 71.

2. *Лукомский Д.С.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов высших порядков: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2002. 103 с.