Эта последовательность индуцирует естественную по (X,τ) точную длинную гомологическую последовательность:

$$\begin{tikzcd}
H(D^{(t+1)}(X)/D^{(t)}(X)) \arrow[rr, "i_*"] & & H(C^{(t)}(X)) \arrow[dl, "\varphi_*"] \\
& H(C^{(t+1)}(X)) \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

Нетрудно показать, что

$$H(D^{(t+1)}(X)/D^{(t)}(X)) = 0.$$

Поэтому точность длинной последовательности означает выполнение равенств

$$Ker\ \varphi_* = Im\ i_* = 0,$$
$$Im\ \varphi_* = Ker\ \delta = H(C^{(t)}(X)).$$

В этом случае имеем естественный по (X,τ) изоморфизм:

$$\varphi_* : H(C^{(t)}(X)) \cong H(C^{(t+1)}(X)).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.

2. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестн. Самар. ун-та. Самара: Самарский университет, 2007. Вып. 7 (57). С. 134-151.

3. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception. The Topology of 3-Manifolds, M.K. Ford(ed). 1962.

4. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

УДК 517.984

В.В. Корнев

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Пусть $\theta(x)$ — непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция, трижды непрерывно дифференцируемая на $(0,1)$, $\theta'(x) < 0$, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$ и $\theta(\theta(x)) \equiv x$. Предположим также, что в некоторой окрестности нуля $\theta'(x) = -x^\alpha$, $\alpha > 0$. Это условие делает $\theta(x)$ недифференцируемой в точке $x = 1$.

Определим с помощью инволюции $\theta(x)$ дифференциальный оператор

$$Ly = \frac{d}{dx}y(\theta(x)),$$

область определения которого состоит из абсолютно непрерывных функций $y(x)$, удовлетворяющих условию $y(1)=0$, и таких, что $y'(\theta(x))\theta'(x) \in L[0,1]$.

Для разложений по собственным функциям оператора L справедлив следующий достаточный признак их равномерной сходимости, который можно рассматривать как аналог известного признака Жордана из теории тригонометрических рядов Фурье.

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ и $f(x)(1-x)^{-\alpha\ (1+\alpha)}$ суммируемы на $[0,1]$, а на отрезке $[a,b] \subset (0,1)$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Тогда на любом отрезке $[a_1,b_1] \subset (a,b)$ ряд Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям оператора L равномерно сходится к $f(x)$.*

Доказательство. Обозначим через $\theta_1(x)$ произвольную функцию со следующими свойствами: $\theta_1(x) \in C^3[0,1]$, $\theta_1'(x) < 0$, $\theta_1(0) = 1$, $\theta_1(1) = 0$, $\theta_1(\theta_1(x)) \equiv x$ и $\theta_1(x) \equiv \theta(x)$ при $\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon$, $\varepsilon = \min\{a, 1-b\}$.

Положим $\beta = \int\limits_0^1 \sqrt{-\theta_1'(t)}\,dt$ и введем в рассмотрение функцию $\varphi(\xi)$: $[0,\beta] \to [0,1]$, которая удовлетворяет соотношению $\int_0^{\varphi(\xi)} \sqrt{-\theta_1'(t)}\,dt \equiv \xi$.

Нетрудно показать, что $\varphi(\xi)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi'(\xi) > 0$.

Рассмотрим теперь на отрезке $[0,\beta]$ функцию $f_1(\xi) = f(\varphi(\xi))$. Из свойств функции $\varphi(\xi)$ следует, что $f_1(\xi)$ суммируема на $[0,\beta]$, непрерывна на $[\xi_a,\xi_b] = [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)]$ и имеет на этом отрезке ограниченную вариацию. Тогда по теореме Жордана [1, с. 121] на любом отрезке $[\tilde{a},\tilde{b}] \subset (\xi_a,\xi_b)$ справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \|\sigma_r(f_1,\xi) - f_1(\xi)\|_{C[\tilde{a},\tilde{b}]} = 0,$$

где $\sigma_r(f_1,\xi)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f_1(\xi)$ по системе $\{\exp 2k\beta^{-1}\pi i\xi\}_{-\infty}^{\infty}$ по тем k, для которых $|2k\pi| < \beta r$. Из этого соотношения следует, что на любом отрезке $[a_1,b_1] \subset (a,b)$ имеет место следующая сходимость:

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \sigma_r(f_1,\xi)|_{\xi=\varphi^{-1}(x)} - f(x) \Big\|_{C[a_1,b_1]} = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь оператор L^{-1}, обратный к оператору L. Он действует в пространстве $L[0,1]$ по формуле

$$L^{-1}f = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt\,. \tag{2}$$

Для интегрального оператора (2) в работе [2] была получена теорема равносходимости, согласно которой

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sigma_r(f_1,\xi)|_{\xi=\varphi^{-1}(x)}\|_{C[a_1,b_1]} = 0\,, \tag{3}$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным функциям оператора (2), соответствующая характеристическим значениям из круга $|\lambda| < r$. Так как собственные функции операторов L и L^{-1} совпадают, то из соотношений (1) и (3) следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1) и РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.

2. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О сходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией, имеющей особенность // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Сарат. зимней шк., посвящ. памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов, 28 янв. - 4 февр. 2008. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 94-95.

УДК 517.984

О.А. Королёва

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С ЯДРОМ, РАЗРЫВНЫМ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

Равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегральных операторов с ядрами, разрывными на ломаных линиях, впервые ввел в рассмотрение А.П. Хромов [1]. В статье изучается один частный случай такого оператора.

1. Резольвента оператора

Рассмотрим интегральный оператор

$$y(x) = Af = \int_0^1 A\,(x,t)\ f(t)dt, \tag{1}$$

ядро которого $A\,(x,t)$ имеет вид

$$A(x,t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1, & 0 \le t \le 1/2 - x \\ \alpha_5, & 1/2 - x \le t \le 1/2 + x \\ \alpha_2, & 1/2 + x \le t \le 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \le x \le 1/2, \\ \\ \begin{bmatrix} \alpha_3, & 0 \le t \le -1/2 + x \\ \alpha_5, & -1/2 + x \le t \le 3/2 - x \\ \alpha_4, & 3/2 - x \le t \le 1 \end{bmatrix}, \quad 1/2 \le x \le 1. \end{bmatrix} \tag{2}$$