ТЕОРЕМА 4. Если цепь Маркова – эргодическая, то есть $A^T \cdot \overline{q} = \overline{o}$ и $B = A^T - \overline{q} \cdot \overline{l}^T$, то решение уравнения (7) имеет вид

$$\overline{v}(t) = \left[e^{B^T \cdot t} + \left(1 - e^{-t}\right) \cdot S^T \right] \cdot \overline{v}(0) + \left[\left(B^T\right)^{-1} \cdot \left(e^{B^T \cdot t} - E\right) + S^T \cdot \left(t + e^{-t} - 1\right) \right] \cdot \overline{g}.$$

При $t \to \infty$ из этого соотношения получаем асимптотическое представление для вектора полных ожидаемых доходов

$$\overline{v}(t) \approx S^T \cdot \overline{g} \cdot t + \left[S^T \cdot \overline{v}(0) - \left(\left(B^T\right)^{-1} + S^T \right) \cdot \overline{g} \right],$$

что совпадает с результатом, полученным в [2] другим путём. Для дискретных цепей Маркова подобный результат получен в [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.

2. *Ховард Р.А.* Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Советское радио, 1964.

3. *Козлова С.И., Мастяева И.Н.* Динамическое программирование / Моск. экон.-стат. ин-т. М., 1984.

4. *Козлова С.И., Михайлов В.Н.* Асимптотические оценки вероятностей состояний однородных цепей Маркова // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 64 – 67.

УДК 519.212

В. Н. Михайлов, С. А. Точилкина

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе [1] был предложен алгоритм расчёта распределения функции от конечного числа независимых дискретных случайных величин. В работе [2] показано, что алгоритм решения этой задачи имеет экспоненциальную вычислительную сложность. Рассмотрим частный, но важный для практического исследования случай, когда необходимо найти распределение суммы независимых одинаково распределённых случайных величин $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, где $n=2^k$.

Введём обозначения

$$\eta_1=\xi_1+\xi_2,\ \eta_2=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4, \ldots,\ \eta_k=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n.$$

Случайная величина η_1 является суммой двух случайных величин ξ_1 и ξ_2, случайную величину η_2 можно рассматривать как сумму двух независимых случайных величин η_2 и η'_2: $\eta_2=\eta_1+\eta'_1$, где $\eta'_1=\xi_1+\xi_2$. Очевидно, случайная величина η'_1 распределена одинаково с η_1. Наконец, $\eta_k=\eta_{k-1}+\eta'_{k-1}$, где η_{k-1}, η'_{k-1} одинаково распределённые независимые случайные величины, являющиеся суммами $n/2$ исходных случайных величин ξ_i. Следовательно, алгоритм вычисления суммы случайных величин можно разбить на k последовательных шагов, причём, на каждом шаге происходит построение закона распределения суммы двух независимых одинаково распределённых дискретных случайных величин, образованных на предыдущем шаге.

Пусть независимые случайные величины η и η' могут принимать значения $x_1<x_2<\ldots<x_s$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Сумма случайных величин $\eta+\eta'$ будет принимать значения $x_{ij}=x_i+x_j$ с вероятностями $p_{ij}=p_i \cdot p_j$, $i=\overline{1,s}$, $j=\overline{1,s}$. Образуем из значений x_{ij} матрицу X

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2s} \\ \ldots & & & \\ x_{s1} & x_{s2} & \ldots & x_{ss} \end{pmatrix}.$$

Матрица X является симметричной, так как $x_i+x_j=x_j+x_i$. Далее, $x_{ij}<x_{ij+1}$, так как $x_i+x_j< x_i+x_{j+1}$, аналогично $x_{ij}<x_{i+1j}$, таким образом, в каждой строке и в каждом столбце элементы матрицы строго возрастают. Для построения распределения $\eta+\eta'$ необходимо найти все одинаковые элементы, вычислить их вероятности, учитывая независимость, и расположить выделенные элементы в возрастающем порядке. При этом надо учитывать симметричность матрицы и возрастание элементов по столбцам и строкам. Так как $x_{ij}=x_{ji}$, то следует вычислять только диагональные элементы матрицы и элементы, находящиеся ниже главной диагонали, то есть $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{is}$, $i=\overline{1,s}$, при этом

$$P\{\eta+\eta'=x_{ij}\}=2p_i \cdot p_j.$$

Следовательно случайная величина $\eta+\eta'$ будет иметь не более $s\cdot(s+1)/2$ различных значений и число операций алгоритма здесь будет пропорционально этой величине.

Если обозначить через s_i максимально возможное число различных значений случайной величины η_i, то будем иметь

$$s_i=\frac{s_{i-1}(s_{i-1}+1)}{2},\ i=\overline{1,k},\ s_0=m,$$

и общее число переборов S, необходимых для вычисления распределения случайной величины $\eta_k=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, будет равно $S=\sum_{i=1}^{k} s_i$.

Заметим, что при использовании для решения этой задачи общего алгоритма [1] число таких переборов будет равно m^n. Имеем $m^n \approx 2^{k-1}S$, т.е. число операций в предлагаемом алгоритме значительно сокращается. Надо учитывать также, что для некоторых дискретных случайных величин число различных значений их суммы будет меньше, чем s_i, и время расчёта распределения уменьшается еще более. Например, вычислительный эксперимент показал, что для m=3 и n=20 прямой расчёт распределения продолжался на компьютере более 2 часов. Применение быстрого алгоритма расчёта дало возможность вычислить закон распределения суммы при m=3 и n=1024. В качестве примера в табл. 1 приводим результаты расчёта распределения суммы 512 случайных величин ξ_i, имеющих следующий ряд распределения.

Таблица 1

ξ_i	0	1	2
p_i	0.25	0.25	0.5

В табл. 2 приводим некоторые значения X (их общее количество равно 1025) в законе распределения ξ – суммы 512 случайных величин, вероятности этих значений $P(\xi=X)$, вероятности $P(\xi<X)$ и $P(\xi\le X)$, значения F_{NORM} функции распределения, вычисленной в соответствии с предельной теоремой по нормальному закону.

Таблица 2

X	$P(\xi=X)$	$P(\xi<X)$	$P(\xi\le X)$	F_{NORM}
550	0.00000028	0.00000098	0.00000126	0.00000083
565	0.00000847	0.00003478	0.00004325	0.00003216
580	0.00013793	0.00069975	0.00083768	0.00069193
595	0.00122603	0.00799958	0.00922561	0.00823104
610	0.00591074	0.05262915	0.05853989	0.05490967
625	0.01534233	0.20407710	0.21941943	0.21199919
640	0.02125447	0.48792393	0.50917840	0.50000000
655	0.01555425	0.77971276	0.79526701	0.78800081
670	0.00594144	0.94270207	0.94864351	0.94509033
685	0.00116838	0.99158077	0.99274915	0.99176896

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Михайлов В.Н., Точилкина С.А.* Метод расчёта закона распределения функции от дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 86 – 89.

2. *Михайлов В.Н., Точилкина С.А.* Распределение векторной функции от независимых дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 93 – 96.

УДК 681.3

В. В. Мозжилкин, О. М. Ромакина

ДОКУМЕНТИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ БАЗ ДАННЫХ

Разработка и документирование больших баз данных (БД) представляет собой серьёзную проблему вследствие значительного объёма информации, хранящейся в БД. По этой причине важны средства компактного описания проектных решений. В настоящее время широко используются CASE – средства, основанные на графической реализации модели сущ-