БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромова Г.В.* Об оценках погрешности приближённых решений уравнений первого рода // ДАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605 – 609.

2. *Молоденкова И.Д.* Построение операторов, восстанавливающих производные // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. С. 95 – 98.

3. *Хромова Г.В., Молоденкова И.Д.* Методы приближённого решения задачи восстановления функций: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Ч. II.

4. *Хромова Г.В.* О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений I рода // Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. 1994. № 4. С. 3 – 10.

5. *Хромова Г.В.* О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. 1993. № 1. С. 13 – 18.

6. *Хромова Г.В., Молоденкова И.Д.* Об одной модификации задачи Колмогорова-Никольского // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2002. Вып. 4. С. 155 – 159.

УДК 511.3

С. И. Небалуев

ТОЛЕРАНТНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПУТЕЙ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ПОДНЯТИИ ТОЛЕРАНТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В теорию толерантных пространств удаётся перенести значительную часть алгебро-топологической техники [1]. В частности, получена полная теория толерантных накрытий [2]. Доказательство теоремы о классификации толерантных накрытий существенно опирается на основную теорему о поднятии толерантного отображения, которая в свою очередь использует свойства толерантного пространства путей. Целью статьи является изложение упомянутого выше.

Толерантное пространство – это пара (X,τ), где X – множество, а $\tau \subset X \times X$ – рефлексивное и симметричное отношение. Отображения толерантных пространств, сохраняющие толерантность, называются *толерантными*.

В теории толерантной гомотопии вместо единичного отрезка используются толерантные пространства (I_n,ι_n), где $n \in N$,

$$I_n = \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; k = \overline{0,n} \right\}, \qquad \frac{k}{n}\iota_n\frac{l}{n} \Leftrightarrow |k-l| \le 1.$$

Толерантное отображение $\omega_n : (I_n,\iota_n) \to (X,\tau)$ назовем *толерантным путём в пространстве* (X,τ) *длины n*. Для любого $m \in N$ такого, что $m \ge n$, определим толерантный путь $\omega_{m,n} : (I_m,\iota_m) \to (X,\tau)$

$$\omega_{m,n}\left(\frac{k}{m}\right)=\begin{cases}\omega_n\left(\frac{k}{n}\right), & k=\overline{0,n};\\ \omega_n(1), & k=\overline{n,m}.\end{cases}$$

Удобно считать $\omega_{m,n}=\omega_n$ для $m\le n$.

На категории толерантных гомотопических типов определён функтор, сопоставляющий каждому толерантному пространству (X,τ) с выделенной точкой $x_0\in X$ фундаментальную группу $\pi(X,x_0)$, а каждому толерантному отображению f – индуцированный гомоморфизм f_π.

Определение 1. Линейно связное толерантное пространство (X,τ) назовем ограниченным, если минимальные длины путей, соединяющих точки пространства (X,τ), ограничены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Толерантно стягиваемое пространство (X,τ) является линейно связным ограниченным пространством с тривиальной фундаментальной группой.

Толерантное пространство (Z,τ) с определением $a\tau b\Leftrightarrow|a-b|\le 1$ является линейно связным, с тривиальной фундаментальной группой, но неограниченным.

Определение 2. Толерантное пространство (X,τ) назовем неограниченным толерантно стягиваемым, если его можно представить в виде $X=\bigcup\limits_{M=1}^{\infty}X_M$ так, что $X_M\subset X_{M+1}$ $(\forall M\ge 1)$, и $\left(X_M,\tau|_{X_M}\right)$ – ограниченные стягиваемые пространства $(\forall M\ge 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Неограниченное толерантно стягиваемое пространство (X,τ) односвязно, т. е. имеет тривиальную фундаментальную группу.

Пусть теперь $((Y,\theta),y_0)$ – линейно связное толерантное пространство с отмеченной точкой $y_0\in Y$. Обозначим через $\wp(Y,y_0)$ множество всевозможных толерантных путей $\omega_n:(I_n,\iota_n)\to(Y,\theta)$ с началом в точке $\omega_n(0)=y_0$. Определим на множестве путей $\wp(Y,y_0)$ отношение толерантности ξ, положив при $m\ge n$

$$\omega_n\xi\omega'_m\Leftrightarrow\left[\left(\forall k,l=\overline{0,m}\right)|k-l|\le 1\Rightarrow\omega_{m,n}\left(\tfrac{k}{m}\right)\theta\omega'_m\left(\tfrac{l}{m}\right)\right].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\omega_n,\omega'_m\in\wp(Y,y_0)$, то

$$\omega_n\xi\omega'_m\Leftrightarrow(\forall M,M'\in N)\ \omega_{M,n}\xi\omega'_{M',m}.$$

Возьмем $M\in N$ и определим подпространство в $(\wp(Y,y_0),\xi)$

$$\wp_M(Y,y_0)=\{\omega_n\in\wp(Y,y_0)\,|\,n\le M\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для всех натуральных $M\in N$ толерантные пространства путей $(\wp_M(Y,y_0),\xi)$ являются ограниченными толерантно стягиваемыми.

Доказательство. Строим толерантное отображение

$$F:\wp_M(Y,y_0)\times I_{M+1}\to\wp_M(Y,y_0),$$

осуществляющее стягивание, определив $F\left(\omega_n,\frac{l}{M+1}\right)$ как толерантный путь $\omega_{M,n}^{(l)}$ в пространстве (Y,θ) такой, что

$$\omega_{M,n}^{(0)}=\omega_n;$$
$$\omega_{M,n}^{(1)}=\omega_{M,n};$$
$$\left(\forall\ l=\overline{2,M+1}\right)\left(\forall\ k=\overline{0,M}\right)\quad \omega_{M,n}^{(l)}\left(\tfrac{k}{M}\right)=\begin{cases}\omega_{M,n}\left(\frac{k}{M}\right), & 0\le k\le M-(l-1);\\ \omega_{M,n}\left(\frac{M-(l-1)}{M}\right), & M-(l-1)\le k\le M.\end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Толерантное пространство путей $(\wp_M(Y,y_0),\xi)$ является неограниченным толерантно стягиваемым пространством.

Определение 3. Толерантное отображение $p:(\overline{X},\overline{\tau})\to(X,\tau)$ назовем толерантным накрытием, если для среза $\tau\langle x\rangle$ по любой точке $x\in X$ имеем:

1) $p^{-1}(\tau\langle x\rangle)=\bigcup\limits_{y\in p^{-1}(x)}\overline{\tau}\langle y\rangle;$

2) $y_1,y_2\in p^{-1}(x),\ y_1\ne y_2\Rightarrow\overline{\tau}\langle y_1\rangle\cap\overline{\tau}\langle y_2\rangle=\emptyset;$

3) $\left(\forall\ y\in p^{-1}(x)\right)\ p:\overline{\tau}\langle y\rangle\to\tau\langle x\rangle$ – толерантный гомеоморфизм.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему о поднятии толерантного отображения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p:((\overline{X},\overline{\tau}),\overline{x}_0)\to((X,\tau),x_0)$ – пунктированное толерантное накрытие, и (Y,θ) – линейно связное толерантное пространство. Тогда пунктированное толерантное отображение

$$f:((Y,\theta),y_0)\to((X,\tau),x_0)$$

имеет поднятие

$$f':((Y,\theta),y_0)\to((\overline{X},\overline{\tau}),\overline{x}_0),$$

т. е. $p\circ f'=f$ тогда и только тогда, когда

$$f_\pi(\pi(Y,y_0))\subset p_\pi(\pi(\overline{X},\overline{x}_0)).$$

Здесь через $\pi(Y,y_0),\pi(\overline{X},\overline{x}_0)$ обозначены фундаментальные группы пространств (Y,θ) и (X,τ), а через f_π,p_π – гомоморфизмы, индуцированные отображениями f и p.

Доказательство. Необходимость следует из функториальных свойств фундаментальной группы. Для доказательства достаточности следует рассмотреть толерантное отображение $\psi=f\circ\varphi$, где

$$\varphi:(\wp(Y,y_0),\xi)\to(Y,\theta)$$

такое, что $\varphi(\omega_n)=\omega_n(1)$, и воспользоваться теоремой 1 для построения отображения $\psi':(\wp(Y,y_0),\xi)\to(\overline{X},\overline{\tau})$, накрывающего $\psi=p\circ\psi'$. Затем строим $f'=\psi'\circ\varphi^{-1}$ – искомое поднятие для f.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Небалуев С.И.* Алгебро–топологические характеристики толерантных пространств // Математика и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. С. 105-107.

2. *Небалуев С.И.* Фундаментальная группа толерантного пространства и толерантные накрытия // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докл. V междунар. конф. Тула, 2003. С. 166 – 167.

УДК 519.4

В. Е. Новиков

СПЕКТР ПОНЯТИЙ НА n-АРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ*

Эта статья является продолжением статей [1, 2] и посвящена дальнейшим исследованиям понятий на n-арных отношениях. В ней дан перечень основных определений, включая спектр понятий n-арного отношения, и приведены некоторые результаты исследований спектра понятий бинарных отношений. Основной результат статьи показывает, что любое конечное бинарное отношение определяется своим спектром понятий с точностью до подобия.

Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \ldots \times M_n$ – некоторое n-арное отношение и элементы $x_{i_1} \in M_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in M_{i_k}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$. Будем говорить, что k-система $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ *входит в* ρ, если существует n-система, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho$, в которой элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ присутствуют в качестве соответствующих компонент. Если k=1, то просто говорим: элемент $x_i \in M_i$, $1 \le i \le n$, *входит в* ρ.

Рассмотрим конечные непустые подмножества из множества натуральных чисел, упорядоченных естественным образом. Упорядоченные множества условимся обозначать $\bar{i}_k = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, где $1 \le i_1 < \ldots < i_k$, при этом положим $\bar{i}_1 = i_1$, $\bar{n} = (1,2,\ldots,n)$. Указанные множества будем использовать в качестве индексов, обозначая $M_{i_1} \times \ldots \times M_{i_k} = M_{\bar{i}_k}$, $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = x_{\bar{i}_k}$, $\{M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}\} = \{M_{\bar{i}_k}\}$, $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} = \{x_{\bar{i}_k}\}$. Задачи, связанные с теорией реляционных баз данных [3], естественно приводят к следующим трём унарным операциям над отношениями.

Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$, $1 \le k, s \le n$ и $a_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k}$. Тогда формула

$$\pi_{\bar{i}_k}(\rho) = \{x_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k} \mid x_{\bar{i}_k} \text{ входит в } \rho\}$$

будет определять *оператор проекции n-арного отношения* ρ *на* $M_{\bar{i}_k}$, формула

---

* Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 99-1224).