БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Небалуев С.И.* Алгебро–топологические характеристики толерантных пространств // Математика и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. С. 105-107.

2. *Небалуев С.И.* Фундаментальная группа толерантного пространства и толерантные накрытия // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докл. V междунар. конф. Тула, 2003. С. 166 – 167.

УДК 519.4

В. Е. Новиков

СПЕКТР ПОНЯТИЙ НА n-АРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ*

Эта статья является продолжением статей [1, 2] и посвящена дальнейшим исследованиям понятий на n-арных отношениях. В ней дан перечень основных определений, включая спектр понятий n-арного отношения, и приведены некоторые результаты исследований спектра понятий бинарных отношений. Основной результат статьи показывает, что любое конечное бинарное отношение определяется своим спектром понятий с точностью до подобия.

Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \ldots \times M_n$ – некоторое n-арное отношение и элементы $x_{i_1} \in M_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in M_{i_k}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$. Будем говорить, что k-система $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ *входит в* ρ, если существует n-система, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho$, в которой элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ присутствуют в качестве соответствующих компонент. Если k=1, то просто говорим: элемент $x_i \in M_i$, $1 \le i \le n$, *входит в* ρ.

Рассмотрим конечные непустые подмножества из множества натуральных чисел, упорядоченных естественным образом. Упорядоченные множества условимся обозначать $\bar{i}_k = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, где $1 \le i_1 < \ldots < i_k$, при этом положим $\bar{i}_1 = i_1$, $\bar{n} = (1, 2, \ldots, n)$. Указанные множества будем использовать в качестве индексов, обозначая $M_{i_1} \times \ldots \times M_{i_k} = M_{\bar{i}_k}$, $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = x_{\bar{i}_k}$, $\{M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}\} = \{M_{\bar{i}_k}\}$, $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} = \{x_{\bar{i}_k}\}$. Задачи, связанные с теорией реляционных баз данных [3], естественно приводят к следующим трём унарным операциям над отношениями.

Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$, $1 \le k, s \le n$ и $a_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k}$. Тогда формула

$$\pi_{\bar{i}_k}(\rho) = \{x_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k} \mid x_{\bar{i}_k} \text{ входит в } \rho\}$$

будет определять *оператор проекции n-арного отношения* ρ *на* $M_{\bar{i}_k}$, формула

* Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 99-1224).

$$\sigma\{a_{\bar{i}_k}\}(\rho)=\{(x_1,...,x_n)\in\rho \mid a_{\bar{i}_k} \text{ входит в } (x_1,...,x_n)\}$$

определит *оператор выбора на n-арном отношении* ρ *по k-системе* $a_{\bar{i}_k}\in M_{\bar{i}_k}$, а множество

$$\rho_{\bar{j}_k}\langle x_{\bar{i}_s}\rangle := \pi_{\bar{j}_k}(\sigma\{x_{\bar{i}_s}\}(\rho))$$

будем называть *элементарным* $\bar{j}_k$*-срезом* ρ *через* $x_{\bar{i}_s}$.

Многие свойства этих операторов приведены в [1] и [2]. Элементарный срез в свою очередь приводит к определению дуального среза.

Пусть по-прежнему $\rho\subseteq M_{\bar{n}}$, $1\le k,s\le n$ и $X\subseteq M_{\bar{i}_s}$. Множество

$$\hat{\rho}_{\bar{j}_k}(X) := \bigcap_{x_{\bar{i}_s}\in X} \rho_{\bar{j}_k}\langle x_{\bar{i}_s}\rangle$$

будем называть *дуальным* $\bar{j}_k$*-срезом* ρ *через подмножество X.*

Таким образом, дуальный $\bar{j}_k$-срез на множестве $M_{\bar{j}_k}$ выделяет подмножества с некоторой общностью атрибутов из $M_{\bar{i}_s}$, именно то, что мы привыкли понимать под понятиями. Для дуального среза справедливо следующее свойство: из $X\subseteq M_{\bar{i}_s}$ следует $X\subseteq\hat{\rho}_{\bar{i}_s\bar{j}_k}(X)$.

Пусть $\rho\subseteq M_{\bar{n}}$ и $1\le s\le n$. Подмножество $X\subseteq M_{\bar{i}_s}$ будем называть $\bar{i}_s$*-понятием n-арного отношения* ρ, если существует $\bar{j}_k$, $1\le k\le n$, такой что

$$X=\hat{\rho}_{\bar{i}_s\bar{j}_k}(X).$$

При этом $\bar{j}_k$ будем называть *определяющей системой атрибутов* $\bar{i}_s$-понятия X, элементы множества X будем называть его *объектами.*

По свойствам дуального среза в множестве всех $\bar{i}_s$-понятий всегда присутствуют $M_{\bar{i}_s}$, $\varnothing$ и $\{x_{\bar{i}_s}\}$, для всякого $x_{\bar{i}_s}\in M_{\bar{i}_s}$, входящего в ρ. Понятия $M_{\bar{i}_s}$ и $\varnothing$ назовём *универсальными*, а $\{x_{\bar{i}_s}\}$ – *индивидуальным.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Объект может быть сам себе атрибутом только для индивидуальных понятий.

В классической логике и в теории реляционных баз данных объект редко описывается атрибутом, имеющим совпадение с этим объектом. Мы также будем исключать из рассмотрения $\bar{i}_s$-понятия с определяющей системой атрибутов $\bar{j}_k\supseteq\bar{i}_s$. При этом из множества $\bar{i}_s$-понятий будет исключаться лишь некоторое множество индивидуальных понятий. Обозначим $C_\rho(M_{\bar{i}_s})$ – множество всех $\bar{i}_s$-понятий отношения ρ, $C'_\rho(M_{\bar{i}_s})$ – множество всех $\bar{i}_s$-понятий, исключая $\bar{i}_s$-понятия с определяющей системой атрибутов $\bar{j}_k\supseteq\bar{i}_s$. При этом $\bar{i}_s$-понятия с определяющей системой атрибутов $\bar{j}_k$, где $\bar{j}_k\cap\bar{i}_s=\varnothing$, назовём $\bar{i}_s$-понятиями *внешнего атрибута.* Если $\bar{j}_k\subseteq\bar{i}_s$, то говорим о $\bar{i}_s$-понятии *внутреннего атрибута.* Наконец, если

$\bar{j}_k \cap \bar{i}_s \neq \varnothing$ и $\bar{j}_k \not\subset \bar{i}_s$, то говорим о $\bar{i}_s$-понятии *смешанного атрибута*. К примеру, в случае бинарного отношения $\rho \subseteq M_{\bar{2}}$ множество $C'_\rho(M_1)$ совпадает с множеством 1-понятий внешнего атрибута отношения ρ.

Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ и $1 \leq s \leq n$. Множество $C_\rho(M_{\bar{i}_s})$ является частично упорядоченным по включению. Множество всех частично упорядоченных множеств понятий n-арного отношения ρ, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, назовём *спектром понятий отношения* ρ. Определение полной решётки можно найти в [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Спектр понятий любого бинарного отношения состоит не более чем из трёх полных решёток.

Естественно возникает вопрос о том, возможно ли построение бинарного отношения, для которого данная произвольная полная решётка содержалась бы в его спектре? Решение этой задачи можно получить из основного результата в [5] (The Basic Theorem on Concept Lattices).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для всякой полной решётки L можно построить бинарное отношение $\rho \subseteq M_{\bar{2}}$, в котором множество 1-понятий внешнего атрибута $C'_\rho(M_1)$ образует решётку, изоморфную L.

Бинарные отношения $\rho \subseteq A_{\bar{2}}$, $\varsigma \subseteq B_{\bar{2}}$ называют *подобными*, если существуют подстановка $\tau \in S_2$ и биекции $f_1 : A_1 \to B_{\tau(1)}$, $f_2 : A_2 \to B_{\tau(2)}$ такие, что $(a_1, a_2) \in \rho$ равносильно $(f_{\tau(1)}(a_{\tau(1)}), f_{\tau(2)}(a_{\tau(2)})) \in \varsigma$.

Следующие результаты касаются анализа спектра понятий бинарного отношения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\rho \subseteq A_{\bar{2}}$, $\varsigma \subseteq B_{\bar{2}}$. Если решётки $C_\rho(A_1)$, $C_\rho(A_2)$ изоморфны соответственно решёткам $C_\varsigma(B_1)$, $C_\varsigma(B_2)$, то отношения ρ и ς подобны.

Замечание. Очевидно, предложение 4 останется в силе, если в его условии решётки $C_\rho(A_1)$, $C_\rho(A_2)$ будут изоморфны соответственно решёткам $C_\varsigma(B_2)$, $C_\varsigma(B_1)$.

ТЕОРЕМА. Два конечных бинарных отношения подобны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же спектр понятий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Новиков В.Е* О системах замыканий на n-арных отношениях. Саратов, 2002. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 17.04.02 № 717 - В2002.

2. *Новиков В.Е* Решётки понятий n-арных отношений // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Из-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 111 – 113.

3. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.

4. *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984.

5. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis: mathematical foundations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.