УДК 519.83

М. В. Пасечник

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА ИНДИВИДУАЛЬНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ИСХОДОВ И МНОЖЕСТВА ДЕЛЕЖЕЙ В ИГРАХ С КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Игра n-лиц с квазиупорядоченными исходами определяется как набор объектов

$$G = \langle N, (X_i)_{i\in N}, A, (\omega_i)_{i\in N}, F\rangle, \tag{1}$$

где $N=\{1,...,n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i, A – множество исходов, ω_i – отношение квазипорядка, выражающее предпочтения игрока i, $F:\prod\limits_{i\in N} X_i \to A$ – функция реализации.

Игра вида (1) игроков $\{1,...,n\}$ содержит реализационную структуру $\langle (X_i)_{i\in N}, A, F\rangle$ и оценочную структуру $\langle A,(\omega_i)_{i\in N}\rangle$.

Исход a называется *индивидуально-рациональным*, если ни один игрок не имеет на него возражений в форме своей стратегии. Множество индивидуально-рациональных исходов обозначается $D(G)$. Индивидуально-рациональный исход, на который нет возражений у коалиции всех игроков, называется дележом. Множество дележей обозначается $\overline{D}(G)$.

Решением игры обычно служит либо всё множество индивидуально-рациональных исходов, либо некоторое его подмножество.

В статье даётся характеризация множества индивидуально-рациональных исходов в играх вида (1).

Предположим, что нам задана оценочная структура, т.е. $\langle A,(\omega_i)_{i\in N}\rangle$ и в множестве A выделено некоторое подмножество $C\subseteq A$. Требуется «восстановить» игру с квазиупорядоченными исходами так, чтобы её оценочная структура совпала с заданной, а подмножество C совпало с множеством индивидуально-рациональных исходов в построенной игре. Эта задача решается для случая, когда множество A конечное.

Будем использовать следующие обозначения. Для произвольного множества $B\subseteq A$ и любого элемента $a\in A$ полагаем:

$MAX_i B$ – множество максимальных элементов подмножества B, относительно квазипорядка ω_i $(i\in N)$;

$MIN_i B$ – множество минимальных элементов подмножества B, относительно квазипорядка ω_i $(i\in N)$;

$M_i(a)=\{a\in A: a' \overset{\omega_i}{>} a\}$ – множество строгих мажорант элемента a относительно квазипорядка ω_i $(i\in N)$;

$m_i(a)=\{a\in A : a' \overset{\omega_i}{<} a\}$ – множество строгих минорант элемента a относительно квазипорядка ω_i $(i\in N)$.

ТЕОРЕМА (характеризация множества индивидуально-рациональных исходов в играх с квазиупорядоченными исходами).

Пусть A – конечное множество, на котором заданы отношения квазипорядка $\omega_1,...,\omega_n$. Для того чтобы подмножество $C\subseteq A$ совпадало с подмножеством индивидуально-рациональных исходов некоторой игры вида (1), необходимо и достаточно, чтобы подмножество $C'=A\setminus C$ допускало представление в виде объединения n подмножеств $C_1,...,C_n$ таких, что:

1) для любого $a_i^*\in MAX_iC_i$ выполняется $\bigcap\limits_{i\in N} M_i(a_i^*)\neq\phi$;

2) пусть $i\in N$, $a\in C_i$, $a'\in A$. Тогда включение $M_i(a)\subseteq M_i(a')$ влечёт $a'\in C_i$.

Доказательство. <u>Необходимость.</u> Пусть G – игра вида n лиц с квазиупорядоченными исходами вида (1), $C=D(G)$. Положим $C_i=U_i^*(G)$ $(i\in N)$. Тогда $C'=\bigcup\limits_{i\in N} U_i^*(G)$. Проверим выполнение условий 1 и 2 теоремы.

1. Возьмем $a_i^*\in MAX_iU_i^*(G)$ $(i\in N)$. Покажем, что $\bigcap\limits_{i\in N} M_i(a_i^*)\neq\phi$.

Так как $a_i^*\in U_i^*(G)$ $(i\in N)$, то по определению множества строго гарантированных исходов выполняется

$$(\exists x_i^*\in X_i)(\forall y\in X_{N\setminus i})F(x_i^*,y)\overset{\omega_i}{>}a_i^* \qquad (i\in N). \qquad (2)$$

В ситуации $x^*=(x_i^*)$ соотношения (2) будут иметь вид $F(x^*)\overset{\omega_i}{>}a_i^*$ $(i\in N)$, т.е. $F(x^*)\in M_i(a_i^*)$ $(i\in N)$. Таким образом, $F(x^*)=\bigcap\limits_{i\in N} M_i(a_i^*)$, откуда $\bigcap\limits_{i\in N} M_i(a_i^*)\neq\phi$.

2. Пусть $i\in N$, $a\in U_i^*(G)$, $a'\in A$ и выполнено включение $M_i(a)\subseteq M_i(a')$. Покажем, что $a'\in U_i^*(G)$. В самом деле, принадлежность $a\in U_i^*(G)$ означает, что существует такая стратегия $x_i^*\in X_i$, что $(\forall y\in X_{N\setminus i})$ $F(x_i^*,y)\overset{\omega_i}{>}a$. По определению $M_i(a)\subseteq M_i(a')$, поэтому из $F(x_i^*,y)\overset{\omega_i}{>}a$ следует $F(x_i^*,y)\overset{\omega_i}{>}a'$. Таким образом, выполняется

$$(\exists x_i^*\in X_i)(\forall y\in X_{N\setminus i})F(x_i^*,y)\overset{\omega_i}{>}a'.$$

Получаем, что x_i^* – возражение игрока i на исход a', т.е. $a'\in U_i^*(G)$.

Укажем теперь основную идею доказательства достаточности. Построим игру G с квазиупорядоченными исходами вида (1) в которой $C_1 = U_1^*(G),...,C_n = U_n^*(G)$. Для построения игры G надо задать: 1) множества стратегий X_i $(i \in N)$, 2) функцию реализации $F: \prod_{i \in N} X_i \to A$. Так как подмножества $C_1,...,C_n$ по условию непусты, то множества их максимальных элементов относительно соответствующих квазипорядков также непусты. Пусть $\{{}^*a_1^i,...,{}^*a_{m_i}^i\} = MAX_i C_i$ $(i \in N)$, $p_i = \max_{1 \le j_i \le m_i} |M_i({}^*a_{j_i}^i)|$ и $p = \max\{p_1,...,p_n,n\}$. Положим $X_i = (x_1^i,...,x_{m_i}^i, y_{m_i+1}^i,...,y_{m_i+p}^i)$ $(i \in N)$, где $1 \le j_i \le m_i$, $m_i + 1 \le k_i \le m_i + p$, причём первые m_i элементов множества X_i будут находиться во взаимно однозначном соответствии с элементами ${}^*a_1^i,...,{}^*a_{m_i}^i$. Функцию реализации F определим следующими правилами.

Правило 1. Если игрок i выбирает стратегию из подмножества своих стратегий $\{x_1^i,...,x_{m_i}^i\}$, а остальные игроки $l = N \setminus i$ выбирают стратегии из подмножеств стратегий $\{y_{m_l+1}^l,...,y_{m_l+p}^l\}$, то

$$F(y_{k_1}^1, y_{k_2}^2,...,x_{j_i}^i,...,y_{k_n}^n) \in M_i({}^*a_{j_i}^i).$$

Правило 2. Если все игроки выбирают свои стратегии из подмножеств стратегий $\{y_{m_i+1}^i,...,y_{m_i+p}^i\}$, то исходы в образуемых ситуациях должны являться минимальными элементами множества A относительно одного из порядков $\omega_1,...,\omega_n$. При этом должно выполняться следующее дополнительное условие: для любой стратегии $y_{k_i}^i$ $(m_i + 1 \le k_i \le m_i + p)$ игрока i у игроков $l = N \setminus i$ существуют такие стратегии $y_{k_l}^l$, что $F(y_{k_1}^1,...,y_{k_i}^i,...,y_{k_n}^n) \in MIN_i A$.

Правило 3. Во всех остальных ситуациях исходы выбираются из множества $\bigcap_{i \in N} M_i({}^*a_{j_i}^i)$ $(1 \le j_i \le m_i)$.

Итак, построена игра, функция реализации F которой удовлетворяет правилам 1 – 3, а оценочная структура есть $\langle A, (\omega_i)_{i \in N} \rangle$. Непосредственно проверяется, что в построенной игре $C_1 = U_1^*(G),...,C_n = U_n^*(G)$.

Проблема характеризации множества дележей в играх с квазиупорядоченными исходами вида (1) может быть сведена к решённой проблеме характеризации множества индивидуально-рациональных исходов, благодаря следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть задана игра G вида (1) с квазиупорядоченными исходами. Тогда можно построить игру

$\overline{G} = \langle N, (\overline{X}_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, \overline{F} \rangle$ так, что $\overline{D}(\overline{G}) = D(\overline{G}) = D(G)$.