УДК 519.83

М. В. Пасечник, В. В. Розен

ИГРЫ С КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ, ИМЕЮЩИЕ ЕДИНСТВЕННЫЙ ИНДИВИДУАЛЬНО РАЦИОНАЛЬНЫЙ ИСХОД

Рассматривается задача характеризации игр с квазиупорядоченными исходами, имеющих единственный индивидуально рациональный исход, а также единственный делёж. Игра с квазиупорядоченными исходами задаётся в виде системы

$$G = < N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F >, \tag{1}$$

где $N = \{1, ..., n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i, A – множество исходов, ω_i – отношение квазипорядка на A, выражающее предпочтение игрока i, $F : \prod_{i \in N} X_i \to A$ – функция реализации. Декартово произведение множеств стратегий игроков $X = \prod_{i \in N} X_i$ есть множество ситуаций игры G. Отношение эквивалентности $\varepsilon = \bigcap \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = \omega_i \cap \omega_i^{-1}$ называется *естественной эквивалентностью* игры G. Через $U_i^*(G)$ обозначается множество исходов игры G, недопустимых для игрока i:

$$U_i^*(G) = \{a \in A : (\exists x_i^* \in X_i)(\forall x \in X) = F(x \| x_i^*) \overset{\omega_i}{>} a\}.$$

$D(G) = (\bigcup_{i \in N} U^*(G))'$ есть множество индивидуально рациональных исходов игры G.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – игра с квазиупорядоченными исходами вида (1), в которой каждое квазиупорядоченное множество $< A, \omega_i >$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (ОВЦ). Для того чтобы исход $c^* \in A$ единственным с точностью до естественной эквивалентности ε индивидуально рациональным исходом в игре G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $U_i^*(G) \subseteq \{a \in A : a \overset{\omega_i}{<} c^*\}$ $(i \in N)$;

2) $\bigcup_{j \in N} U_j^*(G) = \bigcup_{i \in N} \{a \in A : a \overset{\omega_i}{<} c^*\}$;

3) если исход a не эквивалентен исходу c^* относительно ε, то $a \overset{\omega_i}{<} c^*$ для некоторого $i \in N$.

Доказательство. Необходимость. 1. Зафиксируем $i \in N$. Пусть $a \in U_i^*(G)$. В силу условия ОВЦ для квазиупорядоченного множества $< A, \omega_i >$ элемент a мажорируется некоторым максимальным элементом

a_i^* подмножества $U_i^*(G)$, то есть $a \overset{\omega_i}{\leq} a_i^*$, где $a_i^* \in MAX\ U_i^*(G)$. Предполагая, что при любом $j \neq i$ подмножество $U_i^*(G) \neq \varnothing$, зафиксируем для $j \neq i$ максимальные элементы $a_j^* \in MAX\ U_j^*(G)$. Так как при всех $k \in N$ имеет место $a_k^* \in U_k^*(G)$, то для любого $k \in N$ найдётся такая стратегия $x_k^* \in X_k$, что в произвольной ситуации $x \in X$ выполняется $F(x \| x_k^*) \overset{\omega_k}{>} a_k^*$. Таким образом, в ситуации $x^* = (x_k^*)_{k \in N}$ соотношение

$$F(x^*) \overset{\omega_k}{>} a_k^* \tag{2}$$

выполняется для всех $k \in N$. Так как a_k^* – максимальный элемент подмножества $U_k^*(k \in N)$, из (2) следует, что для всех $k \in N$ $F(x^*) \notin U_k^*(G)$, откуда $F(x^*) \in \bigcap\limits_{k \in N} (U_k^*(G))' = D(G)$. По условию единственности индивидуально рационального исхода получаем $F(x^*) \overset{\varepsilon}{\sim} c^*$ и согласно (2) имеем при $k = i$

$$c^* \overset{\varepsilon_i}{\sim} F(x^*) \overset{\omega_i}{>} a_i^* \overset{\omega_i}{\geq} a,$$

откуда $a \overset{\omega_i}{<} c^*$.

2. Включение слева на право выполняются в силу первого условия. Обратно, пусть исход a принадлежит правой части доказываемого равенства, то есть $a \overset{\omega_i}{<} c^*$ для некоторого $i \in N$. Предположим, что $a \notin \bigcup\limits_{j \in N} U_j^*(G)$. Тогда $a \in (\bigcup\limits_{j \in N} U_j^*(G))' = D(G)$ и по условию единственности индивидуально рационального исхода $a \overset{\varepsilon}{\sim} c^*$, откуда $a \overset{\varepsilon_i}{\sim} c^*$, что несовместимо с условием $a \overset{\omega_i}{<} c^*$.

3. Пусть a не эквивалентен исходу c^* относительно ε. Тогда по условию единственности индивидуально рационального исхода $a \notin D(G)$, то есть исход a не допустимый для одного из игроков: $a \in U_i^*(G)$ при некотором $i \in N$. В силу первого условия получаем $a \overset{\omega_i}{<} c^*$.

<u>Достаточность.</u> Пусть в игре G вида (1) для исхода $c^* \in A$ выполнены условия 1 – 3. Предположим, что исход c^* не допустим для игрока $i \in N$. Тогда $c^* \in U_i^*(G)$ и согласно первому условию получаем $c^* \overset{\omega_i}{<} c^*$, что невозможно. Итак, исход c^* допустим для всех игроков, то есть $c^* \in D$. Возь-

мем любой исход $a \in D(G)$. Предположим, что a не эквивалентен исходу c^* относительно ε. Тогда согласно третьему условию для некоторого $i \in N$ будет $a \overset{\omega_i}{<} c^*$ и по второму условию $a \in U_j^*(G)$ для некоторого $j \in N$, то есть исход a не допустим для игрока j. Это противоречит тому, что $a \in D(G)$, что и завершает доказательство теоремы 1.

Следующий результат устанавливает связь между условием единственности индивидуально рационального исхода и равновесием по Нэшу специального типа. Докажем вначале одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Пусть $x^0 \in X$ – ситуация равновесия по Нэшу в игре G. Тогда

$$U_i^*(G) \subseteq \{a \in A : a \overset{\omega_i}{<} F(x^0)\}. \qquad (3)$$

Действительно, возьмём $a \in U_i^*(G)$. Тогда существует такая стратегия x_i^*, для которой в любой ситуации $x \in X$ выполняется $F(x \| x_i^*) \overset{\omega_i}{>} a$, в частности $F(x^0 \| x_i^*) \overset{\omega_i}{>} a$. Так как x^0 – ситуация равновесия по Нэшу, $F(x^0 \| x_i^*) \overset{\omega_i}{\leq} F(x^0)$. Из последних двух соотношений получаем $F(x^0) \overset{\omega_i}{>} a$, что доказывает лемму.

В силу леммы для любой ситуации равновесия по Нэшу x^0 выполнено

$$\bigcup_{j \in N} U_j^*(G) \subseteq \bigcup_{i \in N} \{a \in A : a \overset{\omega_i}{<} F(x^0)\}. \qquad (4)$$

Ситуацию равновесия по Нэшу назовем *специальной*, если для неё в (4) выполнено равенство.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы игра G, в которой для всех $i \in N$ выполнено условие ОВЦ, имела единственный с точностью до естественной эквивалентности ε индивидуально рациональный исход, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала специальная ситуация равновесия по Нэшу x^0, для которой при всяком a, не эквивалентном относительно ε исходу $F(x^0)$, выполняется $a \overset{\omega_i}{>} F(x^0)$ при некотором $i \in N$.

Доказательство. Пусть c^* – единственный с точностью до ε индивидуально рациональный исход. Зафиксируем $a_i^0 \in MAX\, U_i^*(G)$ и пусть x_i^0 – стратегия игрока i, строго гарантирующая ему исход a_i^0 $(i \in N)$. Как показано в доказательстве теоремы 1, исход в ситуации $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ является индивидуально рациональным исходом и по условию единственности $F(x^0) \overset{\varepsilon}{\sim} c^*$. Возьмём $x_i \in X_i$. Исход ситуации $x^0 \| x_i$ будет допустимым для всех игроков $j \neq i$. Возможны два случая.

Случай 1. Исход в ситуации $x^0 \| x_i$, допустим для игрока i. Тогда $F(x^0 \| x_i) \in D(G)$ и по условию единственности $F(x^0 \| x_i) \overset{\varepsilon}{\sim} c^*$, откуда $F(x^0 \| x_i) \overset{\varepsilon}{\sim} F(x_0)$, следовательно, $F(x^0 \| x_i) \overset{\varepsilon_i}{\sim} F(x^0)$.

Случай 2. Исход в ситуации $x^0 \| x_i$ не допустим для игрока i. Тогда $F(x^0 \| x_i) \in U_i^*(G)$ и по первому условию теоремы 1 получаем $F(x^0 \| x_i) \overset{\omega_i}{<} c^*$. Ввиду того, что $c^* \overset{\varepsilon}{\sim} F(x^0)$, выполняется условие $c^* \overset{\varepsilon_i}{\sim} F(x^0)$, откуда $F(x^0 \| x_i) \overset{\omega_i}{<} F(x^0)$.

Итак, в любом случае будет $F(x^0 \| x_i) \overset{\omega_i}{\leq} F(x^0)$, то есть x^0 – ситуация равновесия по Нэшу. Так как $F(x^0) \overset{\varepsilon}{\sim} c^*$, то согласно второму и третьему условиям теоремы 1 получаем доказательство необходимости. Обратно, пусть x^0 – специальная ситуация равновесия, для которой выполнено указанное в теореме 2 дополнительное условие. Тогда для $c^* = F(x^0)$ выполнены все условия теоремы 1, откуда c^* – единственный индивидуально рациональный исход.

Замечание. Теоремы 1 и 2 дают также решение ответа на вопрос о существовании единственного дележа в играх с квазиупорядоченными исходами благодаря следующим утверждениям:

a) если c^* – единственный с точностью до естественной эквивалентности ε индивидуально рациональный исход в игре G, то c^* будет также единственным с точностью до ε дележом;

b) для игры G, в которой для каждого $i \in N$ выполнено условие ОВЦ, верно и обратное: если c^* – единственный с точностью до естественной эквивалентности ε делёж, то он будет также единственным с точностью до ε индивидуально рациональным исходом.

УДК 517.54

Е. В. Разумовская

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРОНУОЛЛА НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ БАЗИЛЕВИЧА

Функции Базилевича составляют широкий подкласс (B_α) однолистных функций. Если $f \in B_\alpha$, то [1]

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t w(z,t)$$