Замечание. Используя данную теорему, можно получить, подобно теореме 2 из [3], представление для ортогональных рациональных функций в терминах автоморфных функций Шоттки- Бернсайда.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bultheel A., Gonzalez-Vera P., Hendriksen E., Njastad O.* Orthogonal rational functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
2. *Джрбашян М.М.* Ортогональные системы рациональных функций на единичной окружности с заданным множеством полюсов //ДАН СССР. 1962. Т. 3. С. 1794 – 1798.
3. *Лукашов А.Л.* Ортогональные рациональные функции на нескольких дугах единичной окружности // Изв. НАН Армении. Сер. Математика. 2001. Т. 36, № 5. С. 52 – 61.
4. *Peherstorfer F.* On Bernstein-Szego orthogonal polynomials on several intervals // SIAM J. Math. Anal. 1990. Vol. 21, № 2. P. 461 – 482.

УДК 519.83

В. В. Розен

СИТУАЦИИ К-РАВНОВЕСИЯ В ИГРАХ С КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

1. Игра n лиц с квазиупорядоченными исходами задаётся в виде системы

$$G = < N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F >, \qquad (1)$$

где $N = \{1,...,n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i, A – множество исходов, ω_i – отношение квазипорядка, выражающее предпочтения игрока i, $F : \prod_{i \in N} X_i \to A$ – функция реализации. Всякое непустое подмножество $S \subseteq N$ называется *коалицией* в игре G. Для произвольной коалиции S определим множество её стратегий X_S и отношение предпочтения ω_S в виде

$$X_S = \prod_{i \in S} X_i, \omega_S = \bigcap_{i \in S} \omega_i. \qquad (2)$$

Пусть $K \subseteq 2^N$ – некоторое семейство коалиций.

Определение1. Ситуация $x^0 \in \prod_{i \in N} X_i = X$ называется *ситуацией К-равновесия*, если ни у какой коалиции $S \in K$ не существует такой стратегии $x_S \in X_S$, при которой

$$F(x^0 \| x_S) >^{\omega_S} F(x^0).$$

Ситуация K-равновесия, при которой $K=2^N$, называется *ситуацией сильного равновесия*. Как известно, в играх численными выигрышами ситуации сильного равновесия существуют весьма редко. В настоящей статье указан способ нахождения в игре (1) такого семейства коалиций K, для которого существует ситуация K-равновесия. В качестве следствия дано достаточное условие существования ситуаций сильного равновесия в играх с квазиупорядоченными исходами.

2. Для формулировки основного результата введём

Определение 2. Будем говорить, что исход $a \in A$ допусти́м для игрока $i=1,\dots,n$ в игре G, если не существует такой стратегии $x_i \in X_i$, для которой при всех $y_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$ выполняется

$$F(x_i, y_{N\setminus i}) \overset{\omega_i}{>} a.$$

Через $D_i(G)$ будем обозначать множество исходов, допустимых для игрока i в игре G. Множество исходов, допустимых для всех игроков, есть $D(G) = \bigcap_{i\in N} D_i(G)$. На множестве X_i стратегий игрока i введём отношение *β-доминирования стратегий*, полагая для произвольных $x_i^1, x_i^2 \in X_i$:

$$x_i^1 \overset{\beta_i}{\geq} x_i^2 \Leftrightarrow \{F(x_i^1, y) : y \in X_{N\setminus i}\}^{\uparrow} \subseteq \{F(x_i^2, y) : y \in X_{N\setminus i}\}^{\uparrow}.$$

($\uparrow$ есть оператор взятия мажорант подмножества в квазиупорядоченном множестве $< A, \omega_i >$). Подмножество $B \subseteq A$ называется *антицепью* относительно квазипорядка ω, если условия $a_1, a_2 \in B$, $a_1 \overset{\omega}{\geq} a_2$ влекут $a_1 \sim a_2$. Основной результат статьи представляет

ТЕОРЕМА. Пусть K – семейство тех коалиций $S \subseteq N$ игры G, для которых подмножество $D(G)$ является антицепью относительно квазипорядка ω_S. Тогда ситуация, состоящая из β_i-максимальных стратегий игроков, является ситуацией K-равновесия в игре G.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

ЛЕММА 1. Множество $D_i(G)$ исходов, допустимых для игрока i в игре G, является мажорантно стабильным относительно квазипорядка ω_i.

ЛЕММА 2. Исход в ситуации, в которой игрок i использует β_i-максимальную стратегию, является допустимым для игрока i.

ЛЕММА 3. Исход в ситуации, в которой каждый игрок $i \in N$ использует β_i-максимальную стратегию, является допустимым.

Для доказательства теоремы рассмотрим ситуацию $x^0 = (x_i^0)_{i\in N}$, в которой каждая стратегия игры x_i^0 является β_i-максимальной ($i \in N$). По лемме 3 выполняется $F(x^0) \in D(G)$. Предположим, что существует такая коалиция $S \in K$ и стратегия $x_S \in X_S$, что

$$F(x^0 \parallel x_S) = F(x_S, x_{N\setminus S}^0) \overset{\omega_S}{>} F(x^0). \tag{3}$$

Тогда согласно (2) для каждого $i \in S$ выполнятся $F(x_S, x_{N\setminus S}^0) \overset{\omega_S}{\geq} F(x^0)$ и по лемме 1 $F(x_S, x_{N\setminus S}^0) \in D_i(G)$ $(i \in S)$. Рассмотрим теперь $j \in N \setminus S$. Так как стратегия x_j^0 является β_i-максимальной, то по лемме 2 будет $F(x_S, x_{N\setminus S}^0) \in D_j(G)$. Таким образом, $F(x_S, x_{N\setminus S}^0) \in \bigcap_{i \in N} D_i(G) = D(G)$. Условия $F(x^0), F(x_S, x_{N\setminus S}^0) \in D(G)$ и (3) приводят к противоречию с предположением, что $D(G)$ – антицепь относительно квазипорядка ω_S, что и завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Если в каждом квазиупорядоченном множестве $< A, \omega_i >$ $(i \in N)$ подмножество допустимых исходов игры $D(G)$ является антицепью, то ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$, состоящая из β_i-максимальных стратегий игроков, будет ситуацией сильного равновесия.

Действительно, пусть $S \subseteq N$ – любая коалиция игры G. Предположим, что для $a, b \in D(G)$ имеет место $a \overset{\omega_S}{\geq} b$. Тогда при каждом $i \in S$ согласно (2) будет $a \overset{\omega_i}{\geq} b$ и по свойству антицепи $a \overset{\varepsilon_i}{\sim} b$. Получаем $a \overset{\varepsilon_S}{\sim} b$, где $\varepsilon_S = \omega_S \cap \omega_S^{-1}$. Показали, что $D(G)$ является антицепью относительно любого квазипорядка ω_S $(S \subseteq N)$. По доказанной теореме ситуация x^0 будет ситуацией сильного равновесия в игре G.

3. Для конкретизации полученного результата обратимся к игре n лиц в нормальной форме с функциями выигрыша игроков

$$\Gamma = < N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} > .$$

Функция выигрыша u_i игрока есть отображение множества X ситуаций игры Γ в R. Игру Γ можно рассматривать как игру с квазиупорядоченными исходами, в которой в качестве множества исходов берётся $A = \{u = (u_1(x), ..., u_n(x)) : x \in X\}$, а отношение предпочтения игрока i определено условием $u \leq^{\omega_i} v \Leftrightarrow u_i \leq v_i$. Положим $\alpha_i = \sup_{x_i} \inf_{y_{N\setminus i}} u_i(x_i, y_{N\setminus i})$.

Стратегия $x_i^0 \in X_i$, на которой достигается супремум функции $\inf_{y_{N\setminus i}} u_i(x_i, y_{N\setminus i})$, называется *осторожной стратегией* игрока i. Осторожная стратегия игрока i является также β_i-максимальной. Исход $a = (a_1, ..., a_n) \in A$ будет допустимым исходом в игре Γ тогда и только тогда, когда $a_i \geq \alpha_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Игра Γ называется *несущественной* в смысле Мулена [1], если множество её допустимых исходов одноэлементно. Так как в этом случае множество допустимых исходов игры будет антицепью относительно любого квазипорядка, то по следствию доказанной теоремы получаем известный результат, что ситуация в осторожных стратегиях будет ситуацией сильного равновесия в несущественной игре с функциями выигрыша игроков [1, с. 28, теорема 1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мулен Э.* Теория игр. М.: Мир, 1985.
2. *Розен В.В.* Математические модели принятия решений в экономике. М.: Книжный дом. Университет – Высшая школа, 2002.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

О СИЛЬНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТЕЙШЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 5-го ПОРЯДКА С НЕОДНОРОДНЫМИ НЕРАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ*

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальным выражением $l(y) = y^{(5)}(x)$ с граничными условиями

$$U_\nu(y) := \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \alpha_{\nu 0} y^{(\nu-2)}(0) + y^{(\nu-1)}(1) = 0,\ \ \nu = \overline{1,5},$$

где $\alpha_\nu,\ \alpha_{\nu 0} \in \mathbf{C}$, $\alpha_{10} = 0$ и $(\alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{40}, \alpha_{50}) \neq (0, 0, 0, 0)$. В случае $\alpha_{20} = \alpha_{30} = \alpha_{40} = \alpha_{50} = 0$, то есть когда краевые условия однородны, в [1] описаны все возможные нерегулярные краевые условия и доказана полнота собственных функций оператора L в пространстве $L_2[0,1]$. В настоящей статье даётся описание некоторых сильно нерегулярных неоднородных краевых условий.

Пусть $\omega_j = \exp\left(\dfrac{(2j-1)\pi i}{5}\right)$, $j = \overline{1,5}$, есть корни 5-й степени из -1, $\lambda = -\rho^5$. Как известно, функции $y_j(x,\rho) = \exp(\rho\omega_j x)$, $j = \overline{1,5}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения $l(y) - \lambda y = 0$.

Введём числа $a_k = \hat{\alpha}_k \omega_1^{k-1}$, $k = \overline{1,5}$, где $(\hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_5) = (\alpha_1, ..., \alpha_5)\,\Omega^{-1}$, $\Omega = (\omega_j^{s-1})_{j,s=1}^5$. Будем обозначать далее $U_\nu(y_j) = \tilde{v}_{\nu j}(\rho) + e^{\rho\omega_j} \tilde{w}_{\nu j}(\rho)$, где $\tilde{v}_{\nu j}(\rho) = \alpha_\nu (\rho\omega_j)^{\nu-1} + \alpha_{\nu 0}$, $\tilde{w}_{\nu j}(\rho) = (\rho\omega_j)^{\nu-1}$, и положим

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).