стратегиях будет ситуацией сильного равновесия в несущественной игре с функциями выигрыша игроков [1, с. 28, теорема 1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мулен Э.* Теория игр. М.: Мир, 1985.
2. *Розен В.В.* Математические модели принятия решений в экономике. М.: Книжный дом. Университет – Высшая школа, 2002.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

О СИЛЬНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТЕЙШЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 5-го ПОРЯДКА С НЕОДНОРОДНЫМИ НЕРАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ*

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальным выражением $l(y)=y^{(5)}(x)$ с граничными условиями

$$U_\nu(y):=\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0)+\alpha_{\nu 0}y^{(\nu-2)}(0)+y^{(\nu-1)}(1)=0,\ \ \nu=\overline{1,5},$$

где $\alpha_\nu,\ \alpha_{\nu 0}\in\mathbf{C}$, $\alpha_{10}=0$ и $(\alpha_{20},\alpha_{30},\alpha_{40},\alpha_{50})\neq(0,0,0,0)$. В случае $\alpha_{20}=\alpha_{30}=\alpha_{40}=\alpha_{50}=0$, то есть когда краевые условия однородны, в [1] описаны все возможные нерегулярные краевые условия и доказана полнота собственных функций оператора L в пространстве $L_2[0,1]$. В настоящей статье даётся описание некоторых сильно нерегулярных неоднородных краевых условий.

Пусть $\omega_j=\exp\left(\dfrac{(2j-1)\pi i}{5}\right)$, $j=\overline{1,5}$, есть корни 5-й степени из -1, $\lambda=-\rho^5$. Как известно, функции $y_j(x,\rho)=\exp(\rho\omega_j x)$, $j=\overline{1,5}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения $l(y)-\lambda y=0$.

Введём числа $a_k=\hat\alpha_k\omega_1^{k-1}$, $k=\overline{1,5}$, где $(\hat\alpha_1,\dots,\hat\alpha_5)=(\alpha_1,\dots,\alpha_5)\,\Omega^{-1}$, $\Omega=(\omega_j^{s-1})_{j,s=1}^5$. Будем обозначать далее $U_\nu(y_j)=\tilde v_{\nu j}(\rho)+e^{\rho\omega_j}\tilde w_{\nu j}(\rho)$, где $\tilde v_{\nu j}(\rho)=\alpha_\nu(\rho\omega_j)^{\nu-1}+\alpha_{\nu 0}$, $\tilde w_{\nu j}(\rho)=(\rho\omega_j)^{\nu-1}$, и положим

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$\widetilde{V}_j(\rho)=\begin{bmatrix} v_{1j}(\rho)\\ v_{2j}(\rho)\\ \dots\\ v_{5j}(\rho)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2(\rho\omega_j)\\ \dots\\ \alpha_5(\rho\omega_j)^4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \alpha_{20}\\ \dots\\ \alpha_{50}\end{bmatrix},\quad \widetilde{W}_j(\rho)=\begin{bmatrix} w_{1j}(\rho)\\ w_{2j}(\rho)\\ \dots\\ w_{5j}(\rho)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \rho\omega_j\\ \dots\\ (\rho\omega_j)^4\end{bmatrix}.$$

Отметим на плоскости следующие точки: 0, ω_j, $\omega_j+\omega_k$ $(j\neq k)$, $\omega_j+\omega_k+\omega_l$ $(j\neq k\neq l\neq j)$, …, $\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5$. Очевидно, выпуклая оболочка M_0 этих точек есть правильный 10-угольник с вершинами в точках $\omega_1+\omega_2$, $\omega_2+\omega_3$, …, $\omega_5+\omega_1$ («чётные» вершины) и $\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $\omega_2+\omega_3+\omega_4$, …, $\omega_5+\omega_1+\omega_2$ («нечётные» вершины). Пусть M_0^0, M_0^1 и M_1 есть многоугольники, получающиеся из M_0 путём удаления соответственно нечётных, чётных и всех вершин. Очевидно, M_1 есть правильный 10-угольник с вершинами в точках ω_1, ω_2, …, ω_5 и $\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4$, $\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5$, …, $\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3$.

Для характеристического определителя $\Delta(\rho)$ оператора L имеет место представление

$$\begin{aligned}\Delta(\rho)&=\det(U_\nu(y_j))_{\nu,j=1}^5=\\ &=\left|\widetilde{V}_1(\rho)+e^{\rho\omega_1}\widetilde{W}_1(\rho),\widetilde{V}_2(\rho)+e^{\rho\omega_2}\widetilde{W}_2(\rho),\dots,\widetilde{V}_5(\rho)+e^{\rho\omega_5}\widetilde{W}_5(\rho)\right|=\\ &=\left\{e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}\widetilde{\Delta}_{12}(\rho)+e^{\rho(\omega_2+\omega_3)}\widetilde{\Delta}_{23}(\rho)+\dots+e^{\rho(\omega_5+\omega_1)}\widetilde{\Delta}_{15}(\rho)\right\}+\\ &+\left\{e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\widetilde{\Delta}_{123}(\rho)+e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}\widetilde{\Delta}_{234}(\rho)+\dots+e^{\rho(\omega_5+\omega_1+\omega_2)}\widetilde{\Delta}_{125}(\rho)\right\}+\\ &+\left\{e^{\rho\omega_1}\widetilde{\Delta}_1(\rho)+e^{\rho\omega_2}\widetilde{\Delta}_2(\rho)+\dots+e^{\rho\omega_5}\widetilde{\Delta}_5(\rho)\right\}+\\ &+\left\{e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}\widetilde{\Delta}_{1234}(\rho)+e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}\widetilde{\Delta}_{2345}(\rho)+\dots+\right.\\ &\left.+e^{\rho(\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\widetilde{\Delta}_{1235}(\rho)\right\}+\widetilde{\Delta}_{12345}(\rho)+\widetilde{\Delta}_0(\rho),\end{aligned}\tag{1}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\widetilde{\Delta}_0(\cdot)=\left|\widetilde{V}_1(\cdot)\widetilde{V}_2(\cdot)\widetilde{V}_3(\cdot)\widetilde{V}_4(\cdot)\widetilde{V}_5(\cdot)\right|,\ \ \widetilde{\Delta}_1(\cdot)=\left|\widetilde{W}_1(\cdot)\widetilde{V}_2(\cdot)\widetilde{V}_3(\cdot)\widetilde{V}_4(\cdot)\widetilde{V}_5(\cdot)\right|,\ \dots,$$
$$\widetilde{\Delta}_5(\cdot)=\left|\widetilde{V}_1(\cdot)\widetilde{V}_2(\cdot)\widetilde{V}_3(\cdot)\widetilde{V}_4(\cdot)\widetilde{W}_5(\cdot)\right|,\ \ \widetilde{\Delta}_{12}(\cdot)=\left|\widetilde{W}_1(\cdot)\widetilde{W}_2(\cdot)\widetilde{V}_3(\cdot)\widetilde{V}_4(\cdot)\widetilde{V}_5(\cdot)\right|,\ \dots,$$
$$\widetilde{\Delta}_{12345}(\cdot)=\left|\widetilde{W}_1(\cdot)\widetilde{W}_2(\cdot)\widetilde{W}_3(\cdot)\widetilde{W}_4(\cdot)\widetilde{W}_5(\cdot)\right|.$$

Некоторые коэффициенты при экспонентах в (1) могут равняться нулю, но имеет место следующий результат.

ЛЕММА 1. Коэффициенты $\widetilde{\Delta}_{jk\dots l}(\cdot)$ при экспонентах в (1) в каждой группе слагаемых, заключённых в фигурные скобки, равны нулю или отличны от нуля одновременно. □

Отметим на плоскости точки ω_j, $\omega_j+\omega_k$, $\omega_j+\omega_k+\omega_l$, …, соответствующие коэффициентам при ρ в показателях экспонент тех слагаемых в (1), при которых стоят ненулевые коэффициенты $\widetilde{\Delta}_{jk\dots l}(\cdot)$. Выпуклая оболочка M_Δ этих точек в силу леммы 1 есть правильный 10- или 5-угольник, характеризующий степень вырожденности характеристического определителя (за исключением полностью вырожденных случаев, когда M_Δ вырождается в точку или совсем исчезает).

Если $M_\Delta = M_0$, то оператор L регулярен по Биркгофу [2, с. 66 – 67]. Если $M_\Delta = M_0^0$ или $M_\Delta = M_0^1$, то L слабо нерегулярен или нормален по терминологии [3]. Если $M_\Delta = M_1$, то L будет сильно нерегулярен. Кратко будем писать в этом случае $L \in NR_1$.

Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы $L \in NR_1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий при $x \in \mathbf{C}$:

(1) $a_5 = a_1 = a_2 = a_3 = x \in C, \quad a_4 \neq x;$

(2) $a_4 = a_5 = a_1 = a_2 = x \in C, \quad a_3 \neq x;$

(3) $\alpha_{20} \neq 0,\ \alpha_{30} = \alpha_{40} = \alpha_{50} = 0$ и

либо (3а) $a_1 = \omega_1^{-2}x,\ a_2 = \omega_1^{-4}x,\ a_3 = \omega_1^{-6}x,\ a_4 \neq \omega_1^{-8}x,\ a_5 \neq x;$

либо (3б) $a_5 = \omega_1^{-2}x,\ a_1 = \omega_1^{-4}x,\ a_2 = \omega_1^{-6}x,\ a_3 \neq \omega_1^{-8}x,\ a_4 \neq x;$

(4) $\alpha_{30} \neq 0,\ \alpha_{20} = \alpha_{40} = \alpha_{50} = 0$ и

либо (4а) $a_1 = \omega_1^{-4}x,\ a_2 = \omega_1^{-8}x,\ a_3 = \omega_1^{-12}x,\ a_4 \neq \omega_1^{-16}x,\ a_5 \neq x;$

либо (4б) $a_5 = \omega_1^{-4}x,\ a_1 = \omega_1^{-8}x,\ a_2 = \omega_1^{-12}x,\ a_3 \neq \omega_1^{-16}x,\ a_4 \neq x;$

(5) $\alpha_{40} \neq 0,\ \alpha_{20} = \alpha_{30} = \alpha_{50} = 0$ и

либо (5а) $a_1 = \omega_1^{-6}x,\ a_2 = \omega_1^{-12}x,\ a_3 = \omega_1^{-18}x,\ a_4 \neq \omega_1^{-24}x,\ a_5 \neq x;$

либо (5б) $a_5 = \omega_1^{-6}x,\ a_1 = \omega_1^{-12}x,\ a_2 = \omega_1^{-18}x,\ a_3 \neq \omega_1^{-24}x,\ a_4 \neq x;$

(6) $\alpha_{50} \neq 0,\ \alpha_{20} = \alpha_{30} = \alpha_{40} = 0$ и

либо (6а) $a_1 = \omega_1^{-8}x,\ a_2 = \omega_1^{-16}x,\ a_3 = \omega_1^{-24}x,\ a_4 \neq \omega_1^{-32}x,\ a_5 \neq x;$

либо (6б) $a_5 = \omega_1^{-8}x,\ a_1 = \omega_1^{-16}x,\ a_2 = \omega_1^{-24}x,\ a_3 \neq \omega_1^{-32}x,\ a_4 \neq x.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рыхлов В.С.* Кратная полнота собственных функций простейшего пучка 5-го порядка // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-XII). Sevastopol, Laspi, September 18–19 2001. Simferopol, 2001. P. 42 – 51.

2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1968.

3. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. Вып. 9. С. 190–229.