$$\sum_{e_0 \subseteq e \subseteq e_\bullet} \mathrm{H}_e \left[\frac{\sup\limits_{t^{-e} \le h^{-e}} \mu_{p,q}^{r^e}(t;G;f) t_{-e}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{\omega_e(t)} \right]$$

и

$$\sum_{e_0 \subseteq e \subseteq e_\bullet} \mathrm{H}_e \left[\frac{\left\| \Delta^{r^e}(t;G) f \right\|_{L_p}}{\omega_e(t) t_e^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \right].$$

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 имеет место неравенство

$$\sum_{e_0 \subseteq e \subseteq e_\bullet} \mathrm{H}_e \left[\frac{\left\| \Delta^{r^e}(t;G) f \right\|_{L_q}}{\omega_e(t)} \right] \le C \sum_{e_0 \subseteq e \subseteq e_\bullet} \mathrm{H}_e \left[\frac{\left\| \Delta^{r^e}(t;G) f \right\|_{L_p}}{\omega_e(t) t_e^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \right].$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
2. *Терехин А.П.* Теоремы эквивалентности классов функций со смешанной производной // ДАН СССР. 1980. Т. 252, № 1. С. 52 – 55.
3. *Терехин А.П.* Смешанная q-интегральная p-вариация и теоремы об эквивалентности и вложении классов функций со смешанным модулем гладкости // Тр. МИАН. 1979. Т. 150. С. 306 – 319.

УДК 517.51

С. П. Сидоров

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ КОНЕЧНОМЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L^p*

Пусть $X = [0,1]$ и $1 \le p < \infty$. Обозначим $L^p(X)$ пространство всех измеримых по Лебегу функций f, для которых $|f|^p$ есть интегрируемая по Лебегу на X функция с нормой

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $C(X)$ означает пространство непрерывных на X функций с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Обозначим P_n множество всех алгебраических полиномов q степени не выше n, таких, что $\left\|q^{(n)}\right\|_{C(X)} \le n!$.

Если $\alpha_{k,n}$, $k = 1,2,\ldots,n$, есть точки из X и $l_{k,n}(x) \in L^p(X)$ (или $l_{k,n}(x) \in C(X)$), $k = 1,2,\ldots,n$, тогда оператор

$$L_n f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_{k,n}) l_{k,n}(x), \ f \in L^p(X) \text{ (или } f \in C(X)),$$

есть линейный оператор, действующий из $L^p(X)$ (или $C(X)$) в $L^p(X)$ (или $C(X)$), который мы назовем I-оператором по сетке $\alpha = (\alpha_{1,n},\ldots,\alpha_{n,n})$ и будем писать $L_n \in I_{n,\alpha}(L^p(X))$ (соответственно $L_n \in I_{n,\alpha}(C(X))$). Это означает, что значения функции в определённом конечном наборе точек определяют значение оператора от этой функции [1, с. 26].

Обозначим $I_n(L^p(X)) = \bigcup\limits_{\alpha} I_{n,\alpha}(L^p(X))$, $I_n(C(X)) = \bigcup\limits_{\alpha} I_{n,\alpha}(C(X))$.

В работе [2] показано, что

$$\inf_{L_n \in I_n(C(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{C(X)} = \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{C(X)},$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$. Инфимум достигается для интерполяционных операторов Лагранжа по сетке $\cos \frac{k\pi}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Цель настоящей статьи – установить аналогичный результат в пространстве $L^p(X)$.

ТЕОРЕМА. Справедлива оценка

$$C_1(n,p) \le \inf_{L_n \in I_n(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)} \le C_2(n,p), \tag{1}$$

где

$$C_1(n,p) = \inf_{(c_0,\ldots,c_{n-1})} \left(\int_X \left| x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \right| dx \right)^{1/p}, \ C_2(n,p) = \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{L^p(X)}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\inf_{L_n \in I_n(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)} = \inf_{\alpha \subset X} \inf_{L_n \in I_{n,\alpha}(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)}. \tag{2}$$

Из [2] следует, что

$$\inf_{L_n \in I_{n,\alpha}(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} |q(x) - L_n q(x)| = \prod_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n} - x|.$$

Используя свойства инфимума, мы можем заключить, что

$$\inf_{L_n \in I_{n,\alpha}(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)} \geq \left(\int_X \prod_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n} - x|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Из (2) следует, что

$$\inf_{L_n \in I_n(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)} \geq \inf_{\alpha \subset X} \left(\int_X \prod_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n} - x|^p \, dx \right)^{1/p} =$$

$$= \inf_{(c_0,\ldots,c_{n-1})} \left(\int_X \left| x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \right| dx \right)^{1/p},$$

и нижняя оценка в (1) установлена.

С другой стороны, интерполяционный оператор Лагранжа по сетке $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi$, $k = 0,1,\ldots,n-1$,

$$L^*_{n-1} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{(-1)^k T_n(x) \sqrt{1 - x_k^2}}{n(x - x_{n-1})},$$

обладает следующими свойствами:

1) если $q \in P_{n-1}$, то $L^*_{n-1} q(x) \equiv q(x)$ на X;

2) если $q(x) = x^n$, то $q(x) - L^*_n q(x) \equiv \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ на X.

Значит,

$$\inf_{L_n \in I_n(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{C(X)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{L^p(X)}. \ \square$$

Приведём два простых следствия из теоремы для случаев $p = 1$ и $p = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Справедлива оценка

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \inf_{L_n \in I_n(L^1(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^1(X)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{L^1(X)}, \tag{3}$$

Доказательство. Из [3, с. 138 – 153] и [4, с. 244 – 313, 507 – 514] следует, что

$$\inf_{(c_0,\ldots,c_{n-1})} \int_X \left| x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \right| dx = \frac{1}{2^{n-1}}. \ \square$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедлива оценка

$$\frac{2^n (n!)^2 \sqrt{4n+2}}{(2n+1)!} \leq \inf_{L_n \in I_n(L^2(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^2(X)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{L^2(X)}. \tag{4}$$

Доказательство. Из [5, с. 28 – 30] следует, что

$$\inf_{(c_0,\dots,c_{n-1})}\left(\int_X\left|x^n-\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^i\right|^2dx\right)^{1/2}=\frac{2^n(n!)^2\sqrt{4n+2}}{(2n+1)!}.\ \square$$

Отметим, что оценки (3) и (4) асимптотически точны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *DeVore R.A.* The approximation of continuous functions by positive linear operators. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1972.

2. *Sidorov S.P.* On some extremal properties of Lagrange interpolatory polynomials // J. Approx. Theory. 2002. Vol. 118, № 2. P. 188 – 201.

3. *Коркин А.И., Золотарев Е.И.* О некотором минимуме. Полн. собр. соч. Е. И. Золотарева: В 2 т. Л.: Изд-во АН СССР, 1931. Т.1.

4. *Чебышев П.Л.* Полн. собр. соч.: В 3 т. М.; Л., 1948. Т. 2.

5. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории приближений. М.: Наука, 1965.

УДК 517.15

Г. А. Сорокин

О ДВУХСТОРОННЕЙ ОЦЕНКЕ ФАКТОРИАЛА $n!$

Некоторые оценки величины $n!$ приведены в [1, с. 179 и с. 341]. В данной статье рассматривается двухсторонняя оценка $n!$, позволяющая для многих значений n вычислить $n!$ точнее, чем по формуле Стирлинга

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}e^{\Theta_n},$$

где $\Theta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

При изложении применяется

ЛЕММА. Для любого натурального числа $n\geq 5$ справедливо равенство

$$\ln n!=\ln\left(\frac{3}{64}\sqrt{n}n^n\right)-\sum_{k=4}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{k+1}{k}. \qquad (1)$$

Доказательство. Это равенство мы получим из тождества

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=na_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1}), \qquad (2)$$

справедливого для любой последовательности $\{a_k\}$ и любого натурального $n\geq 1$. Равенство (2) проверяется непосредственно.

Положим в формуле (2) $a_k=\ln k$. Имеем

$$\ln n!=\sum_{k=1}^{n}\ln k=n\ln(n+1)+\sum_{k=1}^{n}k\ln\frac{k}{k+1}.$$