Доказательство. Из [5, с. 28 – 30] следует, что

$$\inf_{(c_0,\dots,c_{n-1})}\left(\int_X\left|x^n-\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^i\right|^2dx\right)^{1/2}=\frac{2^n(n!)^2\sqrt{4n+2}}{(2n+1)!}.\ \square$$

Отметим, что оценки (3) и (4) асимптотически точны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *DeVore R.A.* The approximation of continuous functions by positive linear operators. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1972.

2. *Sidorov S.P.* On some extremal properties of Lagrange interpolatory polynomials // J. Approx. Theory. 2002. Vol. 118, № 2. P. 188 – 201.

3. *Коркин А.И., Золотарев Е.И.* О некотором минимуме. Полн. собр. соч. Е. И. Золотарева: В 2 т. Л.: Изд-во АН СССР, 1931. Т.1.

4. *Чебышев П.Л.* Полн. собр. соч.: В 3 т. М.; Л., 1948. Т. 2.

5. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории приближений. М.: Наука, 1965.

УДК 517.15

Г. А. Сорокин

О ДВУХСТОРОННЕЙ ОЦЕНКЕ ФАКТОРИАЛА $n!$

Некоторые оценки величины $n!$ приведены в [1, с. 179 и с. 341]. В данной статье рассматривается двухсторонняя оценка $n!$, позволяющая для многих значений n вычислить $n!$ точнее, чем по формуле Стирлинга

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}e^{\Theta_n},$$

где $\Theta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

При изложении применяется

ЛЕММА. Для любого натурального числа $n\ge 5$ справедливо равенство

$$\ln n!=\ln\left(\frac{3}{64}\sqrt{n}n^n\right)-\sum_{k=4}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{k+1}{k}. \tag{1}$$

Доказательство. Это равенство мы получим из тождества

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=na_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}k\left(a_k-a_{k+1}\right), \tag{2}$$

справедливого для любой последовательности $\{a_k\}$ и любого натурального $n\ge 1$. Равенство (2) проверяется непосредственно.

Положим в формуле (2) $a_k=\ln k$. Имеем

$$\ln n!=\sum_{k=1}^{n}\ln k=n\ln(n+1)+\sum_{k=1}^{n}k\ln\frac{k}{k+1}.$$

В правой части этого равенства выделим из суммы последнее слагаемое, а оставшуюся сумму представим следующим образом:

$$\ln n! = n\ln n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{k}{k+1} = \ln\left(\sqrt{n}n^n\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{k+1}{k}.$$

Выделив из последней суммы три первых слагаемых, будем иметь

$$\ln n! = \ln\left(\frac{3}{64}\sqrt{n}n^n\right) - \sum_{k=4}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{k+1}{k}.$$

Мы получили равенство (1).

С помощью леммы доказывается основная

ТЕОРЕМА. При любом натуральном $n \ge 4$ справедливо неравенство

$$\frac{3}{64}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{191}{48}+\frac{1}{12n}} \le n! \le \frac{3}{64}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{9423}{2368}+\frac{49}{592n}}. \tag{3}$$

Доказательство. При $n = 4$ неравенство (3) обращается в равенство. Для доказательства (3) при $n \ge 5$ рассмотрим следующие функции и их производные:

$$\varphi(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} - 2x\left(1+\frac{49}{148}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}\right), \quad \psi(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} - 2x\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}\right);$$

$$\varphi'(x) = \frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\frac{1-99x^2}{74}, \quad \psi'(x) = -\frac{4x^4}{3\left(1-x^2\right)^2} \le 0.$$

Далее достаточно выяснить знаки φ и ψ в промежутке $[0;1/9]$. На этом отрезке $\psi(x)$ убывает от нуля, поэтому $\psi(x) \le 0$.

$\varphi(x)$ в промежутке $\left[0;\sqrt{1/99}\right]$ возрастает от нуля, поэтому $\varphi(x) \ge 0$. В промежутке $\left(\sqrt{1/99};1/9\right]$ $\varphi(x)$ убывает, но остаётся положительной, так как $\varphi(1/9) = 0{,}00001...$ Итак, на $[0;1/9]$ $\varphi(x) \ge 0$. Отсюда и из неравенства $\psi(x) \le 0$ следует, что

$$2x\left(1+\frac{49}{148}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}\right) \le \ln\frac{1+x}{1-x} \le 2x\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}\right).$$

Разделим это неравенство на $2x$ и возьмём $x = 1/(2k+1)$, где $k \ge 4$ – произвольное натуральное число. Так как тогда

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{k+1}{k} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2k+1} \in [0;1/9],$$

то мы получим неравенства

$$1+\frac{49}{148}\cdot\frac{1}{4k(k+1)}\le\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{k+1}{k}\le 1+\frac{1}{12k(k+1)}.$$

Сложим эти неравенства по k от $k=4$ до $k=n-1$. В результате будем иметь

$$n-\frac{9423}{2367}-\frac{49}{592n}\le\sum_{k=4}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{k+1}{k}\le n-\frac{191}{48}-\frac{1}{12n}.$$

Из этого неравенства и леммы следует неравенство (3).

СЛЕДСТВИЕ 1. Для $n=4,5,\ldots,1953$ формула (3) точнее формулы Стирлинга.

В самом деле, решив относительно n неравенство

$$\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi}<\frac{3}{64}e^{\frac{191}{48}+\frac{1}{12n}}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

получим

$$n\le\frac{1}{12\left(\ln\left(\frac{64}{3}\sqrt{2\pi}\right)-\frac{191}{48}\right)}=1953{,}3\ldots$$

СЛЕДСТВИЕ 2. При вычислении $n!$ по формуле (3) при любом $n\ge 4$ относительная ошибка будет меньше $0{,}02\%$.

Действительно, разделив (3) на его левую часть, получим

$$1\le\frac{n!}{\frac{3}{64}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{191}{48}+\frac{1}{12n}}}\le e^{\frac{9423}{2368}-\frac{191}{48}}=1{,}00014\ldots$$

Отсюда видно, что ошибка меньше $0{,}02\%$.

В заключение сравним результаты вычисления $10!$ по формуле Стирлинга и по формуле (3).

По формуле Стирлинга $10!\approx 359696$, между тем как точное значение $10!=3628800$. Относительная ошибка составляет $0{,}83\%$.

По формуле (3) $3628655<10!<3628962$ левая и правая части этого неравенства дают приближенное значение $10!$ с относительной ошибкой, равной всего лишь $0{,}004\%$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Данилов В.Л., Иванова А.Н. и др.* Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. М.: Гостехиздат, 1961.