УДК 517.5

П. А. Терехин

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ *p*-АДИЧЕСКИХ ВСПЛЕСКОВ*

В статье изучаются p-адические аналоги семейств функций-всплесков. Установленные здесь соотношения для коэффициентов Фурье функций по элементам семейств p-адических всплесков позволяют (так же, как и в [1]) получить результаты о представляющих свойствах рассматриваемых систем.

Примем следующие обозначения:

Q_p – поле p-адических чисел ($p = 2,3,5,7,11,13,...$ – простое число);

$|\cdot|_p$ – норма p-адического числа; $\{\cdot\}_p$ – дробная часть p-адического числа;

$Z_p = \{x \in Q_p : |x|_p \leq 1\}$ – кольцо целых p-адических чисел;

$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1,..., p-1\}^k$ – семейство всех конечных последовательностей $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k)$, состоящих из чисел $0,1,..., p-1$ (включая при $k = 0$ пустую последовательность);

$|\alpha| = k$ – длина последовательности $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k) \in A$ (длину пустой последовательности полагаем равной нулю);

$\Delta(\alpha) = \Delta(\alpha_1,...,\alpha_k) = \{x \in Z_p : |x - \alpha_k - \alpha_{k-1}p - ... - \alpha_1 p^{k-1}|_p \leq p^{-k}\}$ – круг в Z_p;

$|\Delta(\alpha)| = p^{-|\alpha|}$ – мера на полукольце $S = \{\varnothing\} \cup \{\Delta(\alpha) : \alpha \in A\}$, лебегово продолжение которой совпадает на Z_p с нормированной мерой Хаара в Q_p.

Пусть функция f имеет носитель $Supp\, f \subset Z_p$. Рассмотрим операторы

$$V_i f(x) = p^{1/2} f(\frac{x-i}{p}), \quad i = 0,1,..., p-1.$$

Обозначим, далее, $V(\alpha) = V_{\alpha_k} ... V_{\alpha_1}$ – произведение операторов, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k) \in A$, первым действует оператор V_{α_1}, последним - V_{α_k}, пустое произведение равно тождественному оператору I. Заметим, что $Supp V(\alpha) f \subset \Delta(\alpha)$.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00123) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

Определение. Семейство функций $\{V(\alpha)f : \alpha \in A\}$ назовем системой p-адических всплесков (или системой сжатий и сдвигов функции f).

Пусть $f \in L^{\rho}(Z_p)$ и $g \in L^{\rho'}(Z_p)$, $1 \le \rho, \rho' \le \infty$, $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1$. Обозначим

$$(V(\alpha)f, g) = \int_{Z_p} V(\alpha)f(x) \cdot \overline{g(x)} dx =$$

$$= \int_{\Delta(\alpha)} p^{k/2} f\left(\frac{x - \alpha_k - \alpha_{k-1}p - \ldots - \alpha_1 p^{k-1}}{p^k}\right) \cdot \overline{g(x)} dx$$

– коэффициенты Фурье функции g по элементам $V(\alpha)f$ системы всплесков.

ТЕОРЕМА 1. При $1 < \rho \le \infty$ справедливо соотношение

$$\lim_{k \to \infty} p^{k(1/2 - 1/\rho')} \left(\sum_{|\alpha| = k} |(V(\alpha)f, g)|^{\rho'} \right)^{1/\rho'} = \left| \int_{Z_p} f(x) dx \right| \cdot \|g\|_{\rho'}.$$

Следует отметить, что при $\rho = 1$ теорема 1 не верна (можно показать, что предел в левой части может не быть равным выражению в правой части рассматриваемого соотношения, более того, этот предел может вообще не существовать). В то же время имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. При $\rho = 1$ справедливо соотношение

$$\varliminf_{k \to \infty} p^{k/2} \left(\max_{|\alpha| = k} |(V(\alpha)f, g)| \right) \ge \left| \int_{Z_p} f(x) dx \right| \cdot \|g\|_{\infty}.$$

Кроме того, если $f(x) \ge 0$ п. в., то

$$\lim_{k \to \infty} p^{k/2} \left(\max_{|\alpha| = k} |(V(\alpha)f, g)| \right) = \int_{Z_p} f(x) dx \cdot \|g\|_{\infty}.$$

Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f \in L^{\rho}(Z_p)$, $1 \le \rho \le \infty$, имеет отличный от нуля интеграл:

$$\int_{Z_p} f(x) dx \ne 0.$$

Тогда для любого бесконечного множества натуральных чисел K величина

$$N(g) = N(g; f, K) = \sup_{k \in K} p^{k(1/2 - 1/\rho')} \left(\sum_{|\alpha| = k} |(V(\alpha)f, g)|^{\rho'} \right)^{1/\rho'}$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $L^{\rho'}(Z_p)$, $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1$.

При доказательстве теорем 1 – 3 использованы некоторые общие результаты эргодической теории. Именно, следующие предложения 1 – 3 устанавливаются по хорошо известной общей для абстрактных динамических систем схеме (см., напр., Арнольд, Авец [2]).

Определим преобразование T кольца Z_p в себя посредством равенства

$$Tx = \frac{x}{p} \, (\mathrm{mod}\, Z_p).$$

Предложение 1. Преобразование T сохраняет меру Хаара:

$$|T^{-1}E| = |E|$$

для любого измеримого множества $E \subset Z_p$.

Предложение 2. Преобразование T является перемешиванием:

$$\lim_{n\to\infty} |T^{-n}A \cap B| = |A| \cdot |B|$$

для любых измеримых множеств $A, B \subset Z_p$.

Рассмотрим оператор $Uf(x) = f(Tx)$, индуцированный преобразованием T. Оператор U изометрический в пространстве $L^\rho(Z_p)$, $1 \le \rho \le \infty$. Этот факт следует из леммы Купмана [3]. Справедлив аналог леммы Фейера:

Предложение 3. Для любых функций $f \in L^\rho(Z_p)$ и $g \in L^{\rho'}(Z_p)$, $1 \le \rho, \rho' \le \infty$, $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1$, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} (U^n f, g) = (f, 1)(1, g),$$

где 1 - функция, тождественно равная единице.

Далее, обозначим

$$I(\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} g(x)dx, \quad \alpha \in A.$$

Из аналога леммы Фейера (предложение 3), применённого к функции

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Delta(\alpha), \\ 0, & x \notin \Delta(\alpha), \end{cases}$$

получим соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Delta(\alpha)} U^n f(x) \overline{g(x)} dx = \overline{I(\alpha)} \int_{Z_p} f(x)dx.$$

При $n > |\alpha|$ имеем

$$\int_{\Delta(\alpha)} U^n f(x) \overline{g(x)} dx = p^{-n/2} \sum_{|\beta| = n - |\alpha|} (V(\alpha\beta) f, g),$$

откуда находим

$$\left| \int_{\Delta(\alpha)} U^n f(x) \overline{g(x)} dx \right| \le p^{-k} p^{n/2} \max_{|\gamma| = n} |(V(\gamma) f, g)|.$$

Устремив здесь $n \to \infty$, получим предельное соотношение

$$|I(\alpha)| \cdot \left| \int_{Z_p} f(x)dx \right| \le p^{-k} \varliminf_{n\to\infty} p^{n/2} \max_{|\gamma|=n} |(V(\gamma) f, g)|.$$

Отсюда

$$\left| \int_{Z_p} f(x)dx \right| \max_{|\alpha|=k} \left| p^k \int_{\Delta(\alpha)} g(x)dx \right| \le \varliminf_{n\to\infty} p^{n/2} \max_{|\gamma|=n} |(V(\gamma) f, g)|.$$

Осталось заметить, что

$$\|g\|_\infty \le \sup_k \max_{|\alpha|=k} \left| p^k \int_{\Delta(\alpha)} g(x)dx \right|$$

(на самом деле здесь имеет место знак равенства), и получено первое из соотношений теоремы 2. Второе соотношение теоремы 2 сразу следует из первого соотношения и очевидной оценки

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} p^{k/2} \max_{|\alpha|=k} |(V(\alpha)f, g)| \le \int_{Z_p} f(x)dx \cdot \|g\|_\infty .$$

Теорема 1 доказывается аналогично (и даже проще). Теорема 3, как уже отмечалось, непосредственно следует из теорем 1 и 2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Терехин П.А.* Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1999. № 8(447). С. 74 – 81.

2. *Арнольд В.И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.

3. *Koopman B.O.* Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Spaces // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 1931. Vol. 17. P. 315 – 318.

УДК 517.51

В. Г. Тимофеев

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ЛАНДАУ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Полученные автором [1 – 3] результаты позволяют оценить наилучшую константу K_p в неравенстве

$$\| u'_{x_i} \|_p \le K_p \|u\|_p^{1/2} \cdot \|\Delta u\|_p^{1/2}, \quad i=\overline{1,m}, \tag{1}$$

при любых $1 \le p \le \infty$.

Пусть

$$\Omega_p = \{u : u \in L_p, \ \ \Delta u \in L_p\},$$

где Δu понимается в смысле Соболева.

ТЕОРЕМА. При всех $1 \le p \le \infty$ для любой функции $u \in \Omega_p$ справедливо неравенство (1) с конечной константой K_p, причём для K_p справедливы оценки

$$1 = K_2 \le K_p \le K_\infty = K_1 = \sqrt{2}.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения [1], получаем, что для всякой функции $u \in \Omega_p$ верно интегральное представление

$$u'_{x_i} = -\frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2}\cdot(m-2)} \int_{\partial\Pi_h} u(\zeta) \frac{\partial^2 G(\xi,0)}{\partial x_i \partial n_\xi} d\xi - \frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2}\cdot(m-2)} \int_{\Pi_h} \Delta u(\xi) \frac{\partial G(\xi,0)}{\partial x_i} d\xi,$$

$$i=\overline{1,m}. \tag{2}$$