(на самом деле здесь имеет место знак равенства), и получено первое из соотношений теоремы 2. Второе соотношение теоремы 2 сразу следует из первого соотношения и очевидной оценки

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} p^{k/2} \max_{|\alpha|=k} |(V(\alpha)f, g)| \le \int_{Z_p} f(x)dx \cdot \|g\|_\infty .$$

Теорема 1 доказывается аналогично (и даже проще). Теорема 3, как уже отмечалось, непосредственно следует из теорем 1 и 2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Терехин П.А.* Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1999. № 8(447). С. 74 – 81.

2. *Арнольд В.И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.

3. *Koopman B.O.* Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Spaces // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 1931. Vol. 17. P. 315 – 318.

УДК 517.51

В. Г. Тимофеев

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ЛАНДАУ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Полученные автором [1 – 3] результаты позволяют оценить наилучшую константу K_p в неравенстве

$$\| u'_{x_i} \|_p \le K_p \|u\|_p^{1/2} \cdot \|\Delta u\|_p^{1/2}, \quad i=\overline{1,m}, \tag{1}$$

при любых $1 \le p \le \infty$.

Пусть

$$\Omega_p = \{u : u \in L_p, \ \ \Delta u \in L_p\},$$

где Δu понимается в смысле Соболева.

ТЕОРЕМА. При всех $1 \le p \le \infty$ для любой функции $u \in \Omega_p$ справедливо неравенство (1) с конечной константой K_p, причём для K_p справедливы оценки

$$1 = K_2 \le K_p \le K_\infty = K_1 = \sqrt{2}.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения [1], получаем, что для всякой функции $u \in \Omega_p$ верно интегральное представление

$$u'_{x_i} = -\frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2}\cdot(m-2)} \int_{\partial\Pi_h} u(\zeta)\frac{\partial^2 G(\xi,0)}{\partial x_i \partial n_\xi} d\xi - \frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2}\cdot(m-2)} \int_{\Pi_h} \Delta u(\xi)\frac{\partial G(\xi,0)}{\partial x_i} d\xi,$$
$$i=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Каждое слагаемое в правой части интегрального представления является свёрткой двух функций, одна из которых принадлежит L_p, а другая – L_1. Известно [4, с. 201], что если $u \in L_p$, $g \in L_1$, то свёртка $u * g$ этих функций принадлежит L_p и

$$\| u * g \|_p \leq \| u \|_p \cdot \| g \|_1 .$$

Поэтому из (2) следует, что $u'_{x_i} \in L_p$ и, более того,

$$\| u'_{x_i} \|_p \leq \| \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial n_\xi} \|_1 \cdot \| u \|_p + \| \frac{\partial G}{\partial x_i} \|_1 \cdot \| \Delta u \|_p$$

или

$$\| u'_{x_i} \|_p \leq J_1 \cdot \| u \|_p + J_2 \cdot \| \Delta u \|_p , \tag{3}$$

где J_1 и J_2 были найдены автором ранее [1].

Поскольку

$$J_1 = \frac{1}{h}; \;\; J_2 = \frac{h}{2}, \tag{4}$$

то, подставляя (4) в (3), получаем

$$\| u'_{x_i} \|_p \leq \frac{1}{h} \| u \|_p + \frac{h}{2} \| \Delta u \|_p .$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства по h, приходим к (1). Неравенство (1) справедливо для всех $1 \leq p \leq \infty$. Это означает, что $K_p \leq \sqrt{2}$.

Ранее [1, 2] было установлено равенство $K_\infty = K_1 = \sqrt{2}$, которое даёт возможность утверждать, что для всех $1 \leq p \leq \infty$

$$K_p \leq K_1 = K_\infty = \sqrt{2}.$$

Получим теперь оценку снизу наилучшей константы K_p в (1). Если $u \in \Omega_p$, то

$$K_p^p \geq \frac{\| u'_{x_i} \|_p^p}{\| u \|_p^{p/2} \| \Delta u \|_p^{p/2}}. \tag{5}$$

Положим

$$g(x_i) = \begin{cases} 1, \;\text{если}\;\; x_i \leq 0, \\ \text{бесконечно-дифференцируемая}, \;\text{если}\;\; 0 \leq x_i \leq \pi, \\ 0, \;\text{если}\;\; x_i \geq \pi, \end{cases}$$

$$h_n(x_i) = g(x_i - n\pi) g(n\pi - x_i), \quad u_n(x) = \sin x_i \cdot h_n(x_1) ... h_n(x_m)$$

для любого $x \in R^m$.

Вычислим для построенной функции $u_n(x)$ значение величин, входящих в правую часть (5). В чётном случае для $p = 2s$, $s = 1, 2, ...$ имеем

$$\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{(2s-1)!! \;\; n\pi}{2^{s-1} \cdot s!} + O((2n\pi)^{m-1}),$$

$$\| u_n \|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{(2s-1)!!\ n\pi}{2^{s-1} \cdot s!} + O((2n\pi)^{m-1}),$$

$$\| \Delta u_n \|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{(2s-1)!!\ n\pi}{2^{s-1} \cdot s!} + O((2n\pi)^{m-1}). \qquad (6)$$

В нечётном случае для $p = 2s+1, \quad s = 1,2,...$

$$\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{2^{s+2} s! \cdot n}{(2s+1)!!} + O\ ((2n\pi)^{m-1}),$$

$$\| u_n \|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{2^{s+2} \cdot s! \cdot n}{(2s+1)!!} + O((2n\pi)^{m-1}),$$

$$\| \Delta u_n \|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{2^{s+2} \cdot s! \cdot n}{(2s+1)!!} + O((2n\pi)^{m-1}). \qquad (7)$$

Из (6), (7) при $n \to \infty$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \|_p^p}{(\| u_n \|_p^p \cdot \| \Delta u_n \|_p^p)^{1/2}} = 1$, а это в силу (5) даёт оценку $K_p \geq 1$. Из [3] следует, что $1 = K_2$.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тимофеев В.Г.* Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676 – 689.

2. *Тимофеев В.Г.* Наилучшее приближение в равномерной и L_2-метриках оператора дифференцирования на некоторых классах функций многих переменных. Саратов, 1985. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 11.04.85. № 2451 - 85.

3. *Тимофеев В.Г.* Об одном экстремальном неравенстве типа Ландау с итерированными операторами Лапласа в $L_2(R^m)$ // Теория функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. Ч. 3. С. 112 – 115.

4. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

УДК 519.212

С. А. Точилкина

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ X^2 ПИРСОНА

Для проверки гипотезы о законе распределения случайной выборки обычно используют асимптотические свойства статистики X^2 Пирсона. Очевидно, что для выборки малого объёма данный подход будет давать погрешность. В статье рассматривается построение точного закона распределения статистики X^2 Пирсона, приводятся результаты расчётов, которые сравниваются с соответствующим асимптотическим законом распределения χ^2.