где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным функциям оператора (2), соответствующая характеристическим значениям из круга $|\lambda| < r$. Так как собственные функции операторов L и L^{-1} совпадают, то из соотношений (1) и (3) следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1) и РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.

2. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О сходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией, имеющей особенность // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Сарат. зимней шк., посвящ. памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов, 28 янв. - 4 февр. 2008. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 94-95.

УДК 517.984

О.А. Королёва

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С ЯДРОМ, РАЗРЫВНЫМ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

Равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегральных операторов с ядрами, разрывными на ломаных линиях, впервые ввел в рассмотрение А.П. Хромов [1]. В статье изучается один частный случай такого оператора.

1. Резольвента оператора

Рассмотрим интегральный оператор

$$y(x) = Af = \int_0^1 A\,(x,t)\ f(t)dt, \tag{1}$$

ядро которого $A\,(x,t)$ имеет вид

$$A(x,t) = \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \alpha_1, & 0 \le t \le 1/2 - x \\ \alpha_5, & 1/2 - x \le t \le 1/2 + x \\ \alpha_2, & 1/2 + x \le t \le 1 \end{array}\right], \quad 0 \le x \le 1/2, \\ \\ \left[\begin{array}{cc} \alpha_3, & 0 \le t \le -1/2 + x \\ \alpha_5, & -1/2 + x \le t \le 3/2 - x \\ \alpha_4, & 3/2 - x \le t \le 1 \end{array}\right], \quad 1/2 \le x \le 1. \end{array}\right. \tag{2}$$

Лемма 1. *Если* $y(x) = R_\lambda(A)f(x)$, *то*

$$v'(x) = \lambda D v(x) + D m(x), \quad x \in [0, 1/2], \tag{3}$$

$$P_0 v(0) + P_1 v(1/2) = 0, \tag{4}$$

где $v(x) = (v_{11}(x), v_{12}(x), v_{21}(x), v_{22}(x))^\top = (y(x), y(1/2 + x), y(1/2 - x), y(1 - x))^\top$,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ c & 0 & 0 & d \\ -b & 0 & 0 & -a \\ 0 & -d & -c & 0 \end{pmatrix}$$

$a = \alpha_5 - \alpha_2$, $b = \alpha_5 - \alpha_1$, $c = \alpha_3 - \alpha_5$, $d = \alpha_4 - \alpha_5$,

$m(x) = (f(x), f(1/2 + x), f(1/2 - x), f(1 - x))^\top$, $P_0 = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -B \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

A и B являются решением системы $\begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_3 y = \alpha_5 \\ \alpha_2 x + \alpha_4 y = \alpha_5 \end{cases}$ *при условии, что* $det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{pmatrix} \neq 0$. *Обратно, если* $v\,(x) = (v_{11}(x), v_{12}(x), v_{21}(x), v_{22}(x))^\top$ *удовлетворяет* (3), (4) *и соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение, и матрица* $Q_1 + Q_2$ *невырождена, где* $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -A & 0 \end{pmatrix}$, *а* $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -B \end{pmatrix}$ *то* R_λ *существует и*

$$R_\lambda = \left[\begin{array}{ll} v_{11}(x), & 0 \le x \le 1/2, \\ v_{12}(x - 1/2), & 1/2 \le x \le 1. \end{array} \right.$$

Лемма 2. *При условии* $d \neq b$, $(d + b)^2 - 4ac \neq 0$ *матрица* D *подобна диагональной* $D_1 = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, *причем* $\omega_3 = -\omega_2$, $\omega_4 = -\omega_1$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

2. Теорема равносходимости

Преобразование $v = \Gamma h$, где $\Gamma^{-1} D \Gamma = D_1$, приводит систему (3), (4) к виду

$$h'(x) = \lambda D_1 h(x) + \Gamma^{-1} D m(x), \tag{5}$$

$$U(h) = P_0 \Gamma h(0) + P_1 \Gamma h(1/2) = 0, \tag{6}$$

Обозначим через $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$, где $Y(x, \lambda)$=diag$(e^{\lambda\omega_1 x}, e^{\lambda\omega_x}, e^{\lambda\omega_3 x}, e^{\lambda\omega_4 x})$. Зафиксируем $arg\lambda$. При этом будем считать, что

$$Re\lambda\omega_1 > Re\lambda\omega_2 > 0.$$

Потребуем, чтобы

$$det\,\Delta_{11} = det\begin{pmatrix} \gamma_{11} - B\gamma_{21} & \gamma_{12} - B\gamma_{22} & -A\gamma_{13} & -A\gamma_{14} \\ -A\gamma_{31} & -A\gamma_{32} & \gamma_{33} - B\gamma_{43} & \gamma_{43} - B\gamma_{44} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} \\ -\gamma_{41} & -\gamma_{42} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{pmatrix} \neq 0,$$

где γ_{ij} — элементы матрицы Γ.

Удалим все нули $det\Delta(\lambda)$ (а они и являются собственными значениями краевой задачи (5), (6)) вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ, тогда в получившейся области S_δ имеет место оценка

$$det\,\Delta(\lambda) \geq c \cdot |e^{\lambda/2(\omega_1+\omega_2)}|,$$

где $c > 0$ и зависит только от δ.

Рассмотрим краевую задачу:

$$u'(x) = \lambda D_1 u(x) + \Gamma^{-1} D m(x),$$

$$U_0(u) = u(0) - u(1/2) = 0.$$

Теперь из S_δ дополнительно удалены δ-окрестности нулей $det\,\Delta_0(\lambda), \quad \Delta_0(\lambda) = U_0(Y(x, \lambda))$.

Справедлива следующая

Лемма 3. *Если $\varepsilon \in (0, 1/4)$, то для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \| \int\limits_{|\lambda|=r} |h(x, \lambda) - u(x, \lambda)| d\lambda \, \|_{[\epsilon,\, 1/2-\epsilon]} = 0,$$

(окружности $|\lambda| = r$ целиком находятся в S_δ).

Теорема. *При выполнении вышеуказанных условий для любой $f(x) \in L[0, 1]$ имеют место соотношения:*

$$\lim_{r\to\infty} \| S_r(f, x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{kj} \frac{1}{\omega_j} \sigma_{r|\omega_j|}(m_{1j}\,,\ x - \frac{k-1}{2}) \, \|_{[\frac{k-1}{2}+\epsilon,\, \frac{k}{2}-\epsilon]} = 0, \quad k = 1, 2,$$

где $\epsilon \in (0, 1/4)$, $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f, x)$ —

частичная сумма ряда Фурье по собственным функциям оператора $u'(x)$, $u(0) = u(1/2)$ (u — скалярная функция) для собственных значений λ_k^0, для которых $|\lambda_k^0| < r$, m_{1j} — компоненты $\Gamma^{-1}Dm(x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб., 2006. Т. 197, №11. С. 115-142.

УДК 518.9

И.А. Кузнецова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГР ТРЕХ ЛИЦ

Понятие иерархических игр было предложено Ю.Б. Гермейером [1], который вместе с учениками создал развитую теорию таких игр [2, 3]. Теория же иерархических игр трех лиц не является такой полной и завершенной. В работе [4] автором рассматривались иерархические игры трех лиц с коалициями. Настоящая статья посвящена некоторому классу бескоалиционных иерархических игр трех лиц.

Рассмотрим следующую ситуацию. Главный управляющий игрок («хозяин») управляет подчиненным через посредника («директора»). Доход «хозяина» явно зависит от действий его и подчиненного, доход «директора» — от действий «хозяина», доход подчиненного — от действий его и «хозяина». «Хозяин» выбирает свою стратегию как функцию от действий «директора», а стратегия «директора», в свою очередь, является функцией от действий подчиненного. Как и обычно в иерархических играх, первый игрок первым выбирает свою стратегию и сообщает ее второму игроку, затем второй игрок выбирает свою стратегию и сообщает ее третьему игроку, после чего делает свой выбор третий игрок, определяя тем самым исход игры. Каждый игрок действует в своих интересах, максимизируя свою функцию выигрыша. Для упрощения изложения считаем, что множества стратегий игроков конечны.

Пусть дана игра $\Gamma = (X, Y, Z, F, G, H)$, где X, Y, Z — множества стратегий игроков, F, G, H — их функции выигрыша. В соответствии с вышеизложенным F отображает $X \times Z$ в R, $G - Y$ в R, $H - Y \times Z$ в R. Мы будем рассматривать следующее информационное расширение данной игры: $\overline{\Gamma} = (\Psi_1, \Phi_2, Z, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$, где $\Psi_1 = \{\psi_1\}$, $\psi_1 : \Phi_2 \to X$, $\Phi_2 = \{\varphi_2\}$, $\varphi_2 : Z \to Y$, при всех ψ_1, φ_2, z справедливо равенство $\overline{F}(\psi_1, \varphi_2, z) = F(\psi_1(\varphi_2), \varphi_2(z), z)$, функции $\overline{G}$ и $\overline{H}$ определяются аналогично. После выбора первым игроком своей стратегии ψ_1 второй игрок, действуя в своих интересах, может выбирать свои стратегии только из множества

$$M_2(\psi_1) = \Big\{\varphi_2' : \; G(\psi_1(\varphi_2')) = \max_{\varphi_2 \in \Phi_2} G(\psi_1(\varphi_2))\Big\}.$$