Окончание табл.

21.1250	0.00001673	0.00003575	0.00002587	0.00000988
21.5000	0.00001673	0.00001903	0.00002145	0.00000242
26.3750	0.00000223	0.00000230	0.00000187	0.00000043
32.0000	0.00000007	0.00000007	0.00000011	0.00000004

В двух первых столбцах таблицы приводится точный закон распределения статистики Пирсона X^2 – значения X и вероятности $P=P(X^2=X)$. В третьем столбце рассчитана вероятность "хвоста" для точного закона распределения статистики Пирсона X^2, в четвёртом – вероятность "хвоста" для асимптотического закона распределения $\chi^2(2)$. Пятый столбец содержит абсолютную погрешность $\varepsilon=|P(X^2\geq X)-P(\chi^2(2)\geq X)|$ между вероятностью "хвоста" точного и асимптотического законов распределения. Анализ последних трёх столбцов показывает, что критическая область, построенная на основе асимптотического закона распределения, не совпадает с критической областью, построенной по точному закону. И для некоторых значений уровня значимости наблюдается значимая потеря точности. Приведённый пример с равными вероятностями $p_1=p_2=p_3=1/3$ даёт наименьшие отклонения от асимптотического закона, чем случаи, когда не выполняется требование $p_1=p_2=p_3$. Таким образом, в некоторых случаях следует использовать точный закон распределения статистики Пирсона.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Михайлов В.Н., Точилкина С.А.* Метод расчёта закона распределения функции от дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 86 – 89.

2. *Михайлов В.Н., Точилкина С.А.* Распределение векторной функции от независимых дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 93 – 96.

3. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973.

УДК 517.51

С. В. Тышкевич

О КВАЗИПОЛИНОМАХ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ НА ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВАХ*

В работе И. В. Белякова [1] была рассмотрена задача наименьшего уклонения от нуля отображений Чебышева, свойства которых во многом повторяют свойства классических многочленов Чебышева, на дельтоиде

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

(области Штейнера). В связи с этим представляют интерес аналоги таких отображений для рациональных функций с фиксированным знаменателем – так называемые квазиполиномы.

Определение. Система заданных на некотором множестве M метрического пространства (содержащем не менее $n+1$ точки) непрерывных функций

$$\varphi_0(z)\ ,\varphi_1(z)\ ,...,\varphi_n(z) \tag{1}$$

называется чебышевской на этом множестве, если любой обобщённый полином $P_n(z)=P_n(\varphi_k,c_k;z)$ вида

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(z), \tag{2}$$

где c_k – числа, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет на M не больше, чем n различных корней.

Теорема Хаара утверждает, что для того чтобы для любой непрерывной на M функции $f(z)$ существовал единственный полином $P_n^*(z)$ её наилучшего равномерного приближения вида $P_n^*(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k^*\varphi_k(z)$, необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{n}$ была чебышевской на M.

Критерий того, что полином $P_n^*(z)$ является полиномом наилучшего приближения порядка n для заданной на M функции $f(z)$, даёт

ТЕОРЕМА Колмогорова (1948). Пусть на замкнутом ограниченном множестве M задано $n+1$ фиксированных непрерывных функций (1) и непрерывная функция $f(z)$, которую следует приблизить обобщёнными полиномами

$$P_n(z)=P_n(\varphi_k,c_k;z)$$

вида (2).

Тогда для того чтобы некоторый полином $P_n^*(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k^*\varphi_k(z)$ был полиномом наилучшего равномерного приближения для функции $f(z)$ в том смысле, что

$$\left\|f(z)-P_n^*(z)\right\|_C=\inf_{P_n}\left\|f(z)-P_n(z)\right\|_C,$$

необходимо и достаточно, чтобы на множестве E всех e-точек из M при любом полиноме $P_n(z)$ вида (2) выполнялось неравенство

$$\min_{z\in E}\operatorname{Re}\left\{P_n(z)\overline{\left[f(z)-P_n^*(z)\right]}\right\}\le 0. \tag{3}$$

Цель данной статьи заключается в нахождении полинома, наименее уклоняющегося от нуля на заданном множестве, когда $\varphi_k(z)$ представляют собой произведения Бляшке.

Пусть $c_i,\ c_i' \in \mathbf{C},\ i=0,1,\dots,n-1,\ n=1,2,\dots;\ a_k \in \mathbf{C},\ k=1,2,\dots,n.$ Обозначим через Π множество функций $P_n(z)$ вида

$$P_n(z)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i \prod_{k=1}^{n-i}\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}+\sum_{i=0}^{n-1} c_i' \prod_{k=1}^{n-i}\frac{1-\overline{a_k}z}{z-a_k}, \tag{4}$$

$$S=\{z\in C:\ |z|=1\}.$$

ТЕОРЕМА. Среди функций вида (4)

$$\min_{p_n\in\Pi}\ \max_{z\in S}\left|P_n(z)\right|$$

достигается только для функций

$$P_n^*(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}+\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\overline{a_k}z}{z-a_k}.$$

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим произведение

$$P_{n-1}(z)\overline{\{P_n^*(z)+\varepsilon\}}. \tag{5}$$

Записав $P_{n-1}(z)$ в виде

$$P_{n-1}(z)=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-\overline{a_k}z}{z-a_k}\left\{c_0\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}\right)^2+c_1\frac{z-a_{n-1}}{1-\overline{a_{n-1}}z}\prod_{k=1}^{n-2}\left(\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}\right)^2+\dots+c_0'\right\},$$

заметим, что при обходе точкой z единичной окружности S в положительном направлении его аргумент увеличивается не более чем на $2(n-1)\pi$, в то время как аргумент второго множителя в (5), записанного в виде $\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\overline{a_k}z}{z-a_k}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}\right)^2+1\right)+\varepsilon$, уменьшается на $2n\pi$, поэтому аргумент произведения (5) уменьшится по крайней мере на 2π. А значит, действительная часть произведения (5), по крайней мере, в одной точке $z_{0,\varepsilon}\in S$ станет неположительной (это произойдёт в точке $z_{0,\varepsilon}$, в которой или аргумент произведения (5) равен $\pi+2m\pi,\ m=0,1,-1,\dots$, или же когда это произведение обратится в нуль). Устремляя ε к нулю по некоторой последовательности ε_l, некоторая подпоследовательность точек z_{0,ε_l} будет сходиться к точке z_0, в которой будет выполняться неравенство

$$\mathrm{Re}\left\{P_{n-1}(z_0)\overline{P_n^*(z_0)}\right\}\le 0.$$

Согласно критерию Колмогорова, получаем требуемое. □

Полученный результат можно обобщить на случай, когда S представляет собой объединение нескольких дуг единичной окружности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Беляков И.В.* Минимальное уклонение от нуля отображений Чебышева, соответствующие равностороннему треугольнику // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 919 – 921.

2. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами. М.: Наука, 1977.

УДК 517.51

В. И. Филиппов

СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ПОЛУЧАЮЩИЕСЯ ВОЗМУЩЕНИЕМ ЯДРА ФЕЙЕРА В $L_1(0,\pi)$*

В работе [1] из ядра Фейера строится система вида

$$F_0(x)\equiv 1,\ F_k^{(n)}=\frac{1}{2^{2(n+1)}}\left(\frac{\sin 2^n\left(x-(2k-1)\pi/2^n\right)}{\sin 1/2\left(x-(2k-1)\pi/2^n\right)}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2^{2(n+1)}}\frac{1-\cos\left(2^{n+1}\pi\right)}{1-\cos\left(x-(2k-2)\pi/2^n\right)}, \tag{1}$$

где $n=0,1,2,\ldots;\ k=1,\ldots,2^n$ и устанавливается, что система (1) является диадическим интерполяционным базисом в пространстве непрерывных 2π-периодических функций.

В данной статье рассматривается возмущение системы (1), а именно, система (8) и возмущение тригонометрической системы в пространстве $L_1(0,\pi)$. Существование устойчивости полных систем в банаховых пространствах рассматривалось в работе [2], а возмущение полных минимальных систем – в работах [3 – 5].

Приведём теоремы A и B об устойчивости полных минимальных систем так, как они приводятся в работе [4].

ТЕОРЕМА A (М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман [3]). Минимальная последовательность $X=\{x_k\}_1^\infty\subset S(B)$ устойчива в том смысле, что при любых $\{\varepsilon_k\geq 0\}_{k=1}^\infty$, для которых

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00390) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).