Полученный результат можно обобщить на случай, когда S представляет собой объединение нескольких дуг единичной окружности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Беляков И.В.* Минимальное уклонение от нуля отображений Чебышева, соответствующие равностороннему треугольнику // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 919 – 921.

2. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами. М.: Наука, 1977.

УДК 517.51

В. И. Филиппов

СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ПОЛУЧАЮЩИЕСЯ ВОЗМУЩЕНИЕМ ЯДРА ФЕЙЕРА В $L_1(0,\pi)$*

В работе [1] из ядра Фейера строится система вида

$$F_0(x)\equiv 1,\ F_k^{(n)}=\frac{1}{2^{2(n+1)}}\left(\frac{\sin 2^n\left(x-(2k-1)\pi/2^n\right)}{\sin 1/2\left(x-(2k-1)\pi/2^n\right)}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2^{2(n+1)}}\frac{1-\cos\left(2^{n+1}\pi\right)}{1-\cos\left(x-(2k-2)\pi/2^n\right)},\tag{1}$$

где $n=0,1,2,\ldots;\, k=1,\ldots,2^n$ и устанавливается, что система (1) является диадическим интерполяционным базисом в пространстве непрерывных 2π-периодических функций.

В данной статье рассматривается возмущение системы (1), а именно, система (8) и возмущение тригонометрической системы в пространстве $L_1(0,\pi)$. Существование устойчивости полных систем в банаховых пространствах рассматривалось в работе [2], а возмущение полных минимальных систем – в работах [3 – 5].

Приведём теоремы A и B об устойчивости полных минимальных систем так, как они приводятся в работе [4].

ТЕОРЕМА A (М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман [3]). Минимальная последовательность $X=\{x_k\}_1^\infty\subset S(B)$ устойчива в том смысле, что при любых $\{\varepsilon_k\geq 0\}_{k=1}^\infty$, для которых

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00390) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$q=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\left\|x_k^*\right\|<1, \tag{2}$$

любая последовательность $Y=\{y_k\}_1^{\infty}$, где $\left\|y_k-x_k\right\|\le\varepsilon_k$ $(k=1,2,...)$, эквивалентна (и, более того, 0-изометрична) X и полнота X влечёт полноту Y.

Тем самым, Y – минимальна; более того, если X – базисная, то и Y – базисная, а если X – безусловная базисная, то и Y – безусловно базисная последовательность.

В том случае, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\left\|x_k^*\right\|<\infty,$$

указанные выше выводы также справедливы после удаления, быть может, конечного числа элементов из X и Y.

Назовём последовательность $U=\{u_k\}_1^{\infty}$ *подчиненной* $X=\{x_k\}_1^{\infty}$, если существует $C<0$ такое, что при любых $\{a_k\}_1^{\infty}$ и $n=1,2,...$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}a_k u_k\right\|\le C\left\|\sum_{k=1}^{n}a_k x_k\right\|. \tag{3}$$

Будем писать в этом случае $U\prec X$. Последовательность $\{x_k+u_k\}_1^{\infty}$ обозначим $X+U$, а $\{\varepsilon x_k\}_1^{\infty}$ обозначим εX.

ТЕОРЕМА B (Ю. Б. Тумаркин [5]). Пусть X – минимальная в B система и $U\prec X$ с некоторой константой C_0 в неравенствах (3). Тогда при любом $\varepsilon<\varepsilon_0=\dfrac{1}{C_0}$ последовательность $Y=X+\varepsilon U$ эквивалентна X и полнота X влечёт полноту $X+\varepsilon U$.

Следствие А [4]. Из теоремы B следует теорема A, так как условие (2) означает, что последовательность $Y-X=U\prec X$ с константой q в (3). Действительно, пусть $x=\sum_{k=1}^{n}a_k x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k^*(x)x_k$. Тогда

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}a_k u_k\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k^*(x)(y_k-x_k)\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left|x_k^*(x)\right|\left\|y_k-x_k\right\|\le\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|x_k^*\right\|\varepsilon_k\right)\left\|x\right\|\le q\left\|x\right\|.$$

Приведём некоторые другие факты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение. Система $\{f_n\} \subset L_p, 0 < p < \infty$ называется системой представления в пространстве L_p, если для любой функции $f \in L_p$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ такой, что

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \right\|_p = 0.$$

Здесь $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\min\left(1, \frac{1}{p}\right)}, \; 0 < p < \infty, \; -\infty \le a < b \le +\infty$.

Рассмотрим функциональную систему $\{\varphi_n(t)\}_{n \in N} \in L_1(a,b)$ такую, что

$$\sup_n \sigma_n = \sigma < 1, \tag{4}$$

где $\sigma_n = \inf \left\{ \frac{1}{|Q|} \| \chi Q(t) - \lambda \varphi_n(t) \|_1 : \lambda \in R, Q \subset (a,b) \right\}$. Если $\varepsilon > 0$ такое, что $\sigma + \varepsilon = \sigma' < 1$, то существуют $\lambda_n \in R$, $Q_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} \left[a_i^n, b_i^n \right]$ такие, что

$$\sigma_n' = \frac{1}{|Q_n|} \| \chi Q_n(t) - \lambda_n \cdot \varphi_n(t) \|_1 \le \sigma + \varepsilon = \sigma' < 1 \tag{5}$$

и также $\sup_n \sigma_n' \le \sigma' < 1$. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ удовлетворяет условию

$$\forall N \in \mathrm{N}, \; mes \left\{ (a,b) \setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} Q_n \right\} = 0. \tag{6}$$

Пусть $x_n = \min_i \{a_i^n\}$, $y_n = \max_i \{b_i^n\}$, обозначим $d(\varphi_n) = y_n - x_n$ и $\operatorname{supp} \varphi_n = \{t : \varphi_n(t) \ne 0\}$. Пусть

$$d(\varphi_n) \to 0, \; n \to \infty, \; d(\varphi_n) \ne 0. \tag{7}$$

Ниже мы используем определение покрытия в смысле Витали [6, с. 30, 231].

ТЕОРЕМА C [7]. Предположим, что система

$$\{\varphi_n\}_{n \in N} \subset L_1(a,b), -\infty < a < b < +\infty$$

удовлетворяет условиям (5) – (7) и для каждого $N \in \mathrm{N}$ множество (a,b) покрывается в смысле Витали семейством $\{Q_n\}_{n=N}^{\infty}$. Тогда если $N \in \mathrm{N}$, то система $\{\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ является системой представления в $L_1(a,b)$.

ТЕОРЕМА D [8]. Если система функций $\{f_n\}$ является системой представления в пространстве $L_q(0,\pi)$, $0<q<\infty$, то система $\{f_n\}$ является системой представления и в пространствах $L_p(0,\pi)$ для всех p, $0<p<1$, $p\le q$.

Используя теоремы C и D, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\varphi_{n,k}-\cos 2^{n+1}x}{1-\cos\left(x-\frac{2\pi(2k+1)}{2^n}\right)}\right|dx\le 0.37,\ \ n=2,3,\ldots;\ \ k=0,1,\ldots,2^{n-2}-1.$$

Тогда существует число $n_0\in N$ такое, что система

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\frac{1-\varphi_{n,k}(x)}{1-\cos\left(x-\frac{(2k+1)2\pi}{2^n}\right)}\right\},\ \ n=n_0+2,\, n_0+3,\ldots;\ \ k=0,1,\ldots,2^{n-2}-1,\quad (8)$$

является системой представления в пространстве $L_p(0,\pi)$, $0<p\le 1$, и существует конкретный алгоритм приближения по системе (8) в этих пространствах.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть система 2π-периодических функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty\in L_1(0,2\pi)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\cos kx-\varphi_k(x)\right|dx\le\sigma_k,\ \ k=0,1,2,\ldots$$

Если

$$\frac{\sigma_0}{2}+\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{2^n-k}{2^n}\sigma_k\le 0.37$$

для всех $n=1,2,\ldots$, то система $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ полна в пространстве $L_1(0,\pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0,\pi)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$.

Следствие 1. Пусть система 2π-периодических функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty\in L_1(0,2\pi)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\cos kx-\varphi_k(x)\right|dx\le\sigma_k,\ \ k=0,1,2,\ldots$$

Если

$$\frac{\sigma_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\le 0.37,$$

то система $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ полна в пространстве $L_1(0,\pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0,\pi)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$.

Замечание 1. В теоремах A и B приводятся результаты об устойчивости полных минимальных систем. В теореме 1 рассматривается специальное возмущение системы (1), при этом системы (1) и (8), очевидно, не являются минимальными. А в теореме 2 более слабое возмущение, чем в теоремах A и B, но дается алгоритм представления по новой, полученной возмущением системе, что пока не представляется возможным сделать для всех систем при использовании теорем A и B в пространстве L_1 (так как процесс ортогонализации в L_1 не применим).

Заметим, что в работе [9] приводится более сильное возмущение в пространстве L_1 системы Хаара, чем в теореме A (ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k \left\| x_k^* \right\|$ расходится), но свойство полноты остаётся устойчивым, при этом приводится алгоритм приближения по новой, полученной возмущением, системе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бочкарев С.В.* Построение интерполяционного диадического базиса в пространстве непрерывных функций на основе ядер Фейера // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 172. С. 29 – 59.

2. *Олевский А.М.* Об устойчивости оператора ортогонализации Шмидта // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1970. Т. 34. С. 808 – 826.

3. *Крейн М.Г., Мильман Д.П., Рутман М.А.* Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха // Зап. мат. общества. Харьков, 1940. Т. 16, № 5. С. 97 – 112.

4. *Мильман В.Д.* Геометрическая теория пространств Банаха // УМН. 1970. Т. 25, вып. 3(153). С. 113 – 174.

5. *Тумаркин Ю.Б.* Устойчивость базисов в B-пространствах и других классах ЛВП // Теория функций, функциональный анализ и его применения: Сб. науч. тр. 1970. Вып. 14. С. 87 – 94.

6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

7. *Filippov V.I.* On the completeness and other properties of some function systems in L^p, $0 < p < \infty$ // JAT. 1998. Vol. 94. P. 42 – 53.

8. *Filippov V.I.* Linear continuous functionals and representation of functions by series in the spaces E_φ // Analysis Mathematica. 2001. Vol. 27, № 4. P. 239 – 260.

9. *Филиппов В.И.* О сильных возмущениях системы Хаара в пространствах $L_1(0,1)$ // Мат. заметки. 1999. Т. 66, вып. 4. С. 596 – 602.