УДК 517.984

В. А. Халова

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор вида

$$Af(x)=\alpha_1\int_0^x(x-t)f(t)dt+\alpha_2\int_0^{1-x}(1-x-t)f(t)dt+\sum_{k=1}^m(f,v_k)g_k(x), \quad (1)$$

где $(f,v_k)=\int_0^1 f(t)v_k(t)dt$, $v_k(t)\in C^2[0,1]$, $g_k(x)\in C^2[0,1]$, системы функций $\{v_k''(t)\}_1^m$, $\{g_k''(x)\}_1^m$ линейно независимые, $\beta=\alpha_1^2-\alpha_2^2\neq 0$, $x\in[0,1]$.

Оператор (1) является одним из простейших операторов вида

$$Af(x)=\int_0^1 A(x,t)f(t)dt, \qquad x\in[0,1], \quad (2)$$

некоторая производная ядра которого имеет разрыв 1-го рода на линиях $t=x$ и $t=1-x$. Основополагающие работы по исследованию спектральных разложений операторов такого вида принадлежат А. П. Хромову (см., напр., [1]). В работе [2] им совместно с В. В. Корневым для оператора

$$Af(x)=\int_0^{1-x}A(1-x,t)f(t)dt+\alpha\int_0^x A(x,t)f(t)dt$$

при некоторых условиях на ядро $A(x,t)$ была получена теорема равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) и разложений в тригонометрические ряды Фурье.

В данной статье получена аналогичная теорема для оператора (1).

Важным достоинством оператора (1) является то, что для него условия существования обратного оператора выписываются в явном виде [3]. Существование оператора A^{-1} является необходимым условием для получения теоремы равносходимости [1].

Пусть [3] $\Delta=\det\left\|\beta\delta_{kj}+(D^2Tg_k,v_j)\right\|_1^m\neq 0$, где δ_{kj} – символ Кронекера, $D=\frac{d}{dx}$, $T=\alpha_1E-\alpha_2S$, E – единичный оператор, $Sf(x)=f(1-x)$. Тогда оператор A^{-1} существует и имеет место представление

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$A^{-1}y(x)=Ly(x)-\frac{\beta}{\Delta}\sum_{k,j=1}^{m}Lg_k(x)(Ly,v_j)\Delta_{jk},$$

где $L=\frac{1}{\beta}D^2T$, Δ_{jk} – алгебраические дополнения определителя Δ;

$y(x)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma_p}\left[a_{\tau p}y^{(\tau)}(0)+b_{\tau p}y^{(\tau)}(1)\right]=(y,\varphi_p), \qquad p=1,2, \tag{3}$$

$\sigma_1=1,\ \sigma_2=0,\ \varphi_p\in C[0,1]$.

Считаем, что условия (3), представляющие собой условия из теоремы 2 из [3] после нормировки, регулярны по Биркгофу [4, с. 66 – 67].

Рассмотрим задачу

$$z''(x)-\lambda\mathbf{D}z(x)=BF(x),$$

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma_p}\left[P_\tau z^{(\tau)}(0)+Q_\tau z^{(\tau)}(1)\right]=0, \quad p=1,2,$$

где $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^T$, $z_1(x)=z_2(1-x)$, $F(x)=(f(x),f(1-x))^T$, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$, $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & d^2\end{pmatrix}$, $d^2=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}$, $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_2-\alpha_1\end{pmatrix}$,

$P_\tau=\begin{pmatrix}p_\tau^1 & p_\tau^2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $Q_\tau=(-1)^\tau\begin{pmatrix}0 & 0\\ p_\tau^1 & -p_\tau^2\end{pmatrix}$, $p_\tau^1=a_\tau+(-1)^\tau b_\tau$, $p_\tau^2=a_\tau-(-1)^\tau b_\tau$,

λ – спектральный параметр.

Положим $\lambda=\rho^2$, $0\le\arg\rho\le\pi$. Разобьём $0\le\arg\rho\le\pi$ на секторы $\gamma_{j-1}\le\arg\rho\le\gamma_j$, $j=1,...,s$ $(0=\gamma_0<...<\gamma_s=\pi)$ таким образом, что числа $\omega_1=-\omega_2=1$, $\omega_3=-\omega_4=d$ можно перенумеровать $\tilde{\omega}_j$, $j=1,...,4$ так, чтобы при любых ρ из рассматриваемого сектора выполнялось

$$\operatorname{Re}\rho\tilde{\omega}_1\le\operatorname{Re}\rho\tilde{\omega}_2\le 0\le\operatorname{Re}\tilde{\omega}_3\le\operatorname{Re}\rho\tilde{\omega}_4.$$

Обозначим $S_{\delta_0}=\bigcup_{j=1}^{s}S_{\delta_0,j}$, где $S_{\delta_0,j}$ – область, получающаяся из сектора $\gamma_{j-1}\le\arg\rho\le\gamma_j$ удалением всех нулей многочлена

$$a_{0,j}+a_{1,j}e^{-2\rho\tilde{\omega}_2}+a_{2,j}e^{-\rho(\tilde{\omega}_1+\tilde{\omega}_2)}+a_{3,j}e^{-2\rho\tilde{\omega}_1}+a_{4,j}e^{-2\rho(\tilde{\omega}_1+\tilde{\omega}_2)},$$

где $a_{k,j}\ne 0$, $k=0,...,4$, вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0.

Удалим из области S_{δ_0} ещё точки ρ_k, $k = 1,2,...$ вместе с круговыми окрестностями того же радиуса δ_0, для которых $(\alpha_1 + \alpha_2)\rho_k^2$ или $(\alpha_1 - \alpha_2)\rho_k^2$ являются собственными значениями краевой задачи

$$y''(x) - \lambda y(x) = 0, \qquad y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1), \quad j = 1,2,$$

где $y(x)$ – скалярная функция, и для оставшейся области сохраним обозначение S_{δ_0}.

Обозначим $p_{jk} = p_{ij}^k$, $i = 2 - j$, $k, j = 1,2$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\Delta \neq 0$ и $(p_{11}p_{22})^2 \neq (p_{12}p_{21}d)^2$, $p_{jk} \neq 0$, $j,k = 1,2$, и $\{g_k(x)\}^m$ – функции ограниченной вариации. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ имеет место

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\delta \le x \le 1-\delta} \left| S_r(f,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|d_1|}(f+g,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|d_2|}(f-g,x) \right| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ для тех номеров k, для которых $(2k\pi)^2 < r$; $g(x) = f(1-x)$, $d_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $d_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ и r таково, что $\{\rho \,|\, |\rho| = \sqrt{r},\ 0 \le \arg\rho \le \pi\} \subset S_{\delta_0}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т.114(156), № 3. С. 378 – 405.

2. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // ДАН. 2001. Т. 379, № 6. С. 741 – 744.

3. *Халова В.А.* Задача обращения одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С.125 –127.

4. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука. 1969.