Последний интеграл при $x=\frac{1}{2}$ принимает значения 1 или -1, причём при возрастании r оба этих значения все время сменяют друг друга. Значит, при $x=\frac{1}{2}$ (2) не имеет место даже для любой абсолютно непрерывной функции $f(x)$, для которой $f'(x)\in L_2[0,1]$, $U(f)\neq 0$, $f(0)=f(1)$. Обычный же ряд Фурье такой функции всегда сходится, а по с.п.ф. оператора L расходится.

Приведём еще обобщение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что $p(x)$ m раз непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, причём $p^{(m)}(x)\in V[0,1]$ и $p^{(s)}(0)=p^{(s)}(1)=0$ $(s=0,\ldots,m-1)$, $p^{(m)}(0)p^{(m)}(1)\neq 0$. Тогда, если $f(x)\in L[0,1]$ и $\int_0^1 p^{(s)}(t)f(t)dt=0$ $(s=0,\ldots,m)$, то имеет место (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Молоденков В.А., Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов, 1972. Вып. 1. С. 17 – 26.

2. *Молоденков В.А.* Равносуммируемость по М. Риссу разложений по некоторым системам показательных функций // Мат. заметки. 1974. Т. 15, №3. С. 381 – 386.

3. *Седлецкий А.М.* Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37, № 5. С. 51 – 95.

4. *Седлецкий А.М.* О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1991. Т. 200. С. 299 – 309.

5. *Седлецкий А.М.* О суммируемости и сходимости негармонических рядов Фурье // ИАН. Серия математическая. 2000. Т. 64, № 3. С.152 – 168.

УДК 517.927.25

А. П. Хромов, Д. Г. Шалтыко

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ*

В данной статье исследуется вопрос о сходимости рядов по собственным и присоединенным функциям краевой задачи, определяемой дифференциальным уравнением

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$y''' + \lambda y = 0, \tag{1}$$

и трёхточечными распадающимися краевыми условиями

$$y(0) = y'(\alpha) = y(1) = 0 \quad (0 < \alpha < 1). \tag{2}$$

Отметим, что задача о сходимости спектральных разложений в случае $\alpha = 0$ (и для более общих дифференциальных операторов n-го порядка с произвольными распадающимися краевыми условиями) получила окончательное решение в работе А. П. Хромова [1]. Исследованием же задач вида (1) – (2) и даже более общими многоточечными краевыми задачами n-го порядка занимался Г. Фрайлинг [2]. Им были получены достаточные условия разложимости функций в ряды по собственным функциям таких задач.

В настоящей статье приводятся необходимые и достаточные условия разложения произвольной функции в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям задачи (1) – (2), что усиливает результаты [2] для случая краевой задачи (1) – (2). Тем самым даётся окончательное решение вопроса о разложении произвольной функции в ряды по собственным и присоединенным функциям задачи (1) – (2) на $(0,1)$.

ТЕОРЕМА 1. Краевая задача (1) – (2) имеет бесконечно много собственных значений, которые можно разложить в две серии:

$$\lambda_{k+h_1,1} = -\rho_{k,1}^3, \quad \rho_{k,1} = \frac{2k\pi + \dfrac{2\pi}{3}}{(1-\alpha)\sqrt{3}} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k = 1,2,\ldots,$$

$$\lambda_{k+h_2,2} = -\rho_{k,2}^3, \quad \rho_{k,2} = \frac{2k\pi + \dfrac{2\pi}{3}}{\alpha\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k = 1,2,\ldots,$$

где h_1, h_2 – некоторые целые числа. При этом все собственные значения, достаточно большие по модулю, простые.

Предположим, что $\{\varphi_{k,1}(x)\}$ и $\{\varphi_{k,2}(x)\}$ – соответствующие этим сериям собственные и присоединенные функции и $\{\psi_{k,1}(x)\}$, $\{\psi_{k,2}(x)\}$ – соответствующие биортогональные системы. Обозначим через $T_{a,b}$ правильный треугольник в комплексной плоскости с центром в точке a и одной из вершин в точке b.

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд $\sum a_k \varphi_{k,1}(x)$ сходится равномерно на $[x_0, x_1]$ $(0 < x_0 < x_1 < 1)$, то он сходится абсолютно и равномерно в области T_{0,x_1} и его сумма $f_1(x)$ удовлетворяет условиям

$$f_1^{(3k)}(0) = 0 \text{ и } f_1^{(3k+1)}(\alpha) = 0 \text{ (если } \alpha \in T_{0,x_1}\text{)}, \ k = 0,1,2,\ldots$$

ТЕОРЕМА 3. Если ряд $\sum b_k \varphi_{k,2}(x)$ сходится равномерно на $[x_0, x_1]$ $(0 < x_0 < x_1 < 1)$, то он сходится абсолютно и равномерно в области T_{1,x_0} и его сумма $f_2(x)$ удовлетворяет условиям

$$f_2^{(3k)}(1) = 0 \text{ и } f_2^{(3k+1)}(\alpha) = 0 \text{ (если } \alpha \in T_{1,x_0}\text{)}, \ k = 0,1,2,...$$

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что ряд $\sum a_k \varphi_{k,1}(x) + \sum b_k \varphi_{k,2}(x)$ сходится равномерно на $[0,1]$ к $f(x)$ и его части $\sum a_k \varphi_{k,1}(x)$ и $\sum b_k \varphi_{k,2}(x)$ сходятся к $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Тогда $f_1(x)$ ортогональна $\{\psi_{k,2}(x)\}$ и $f_2(x)$ ортогональна $\{\psi_{k,1}(x)\}$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что $f(x) \in L_2[0,1]$ и имеет вид

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ регулярна в $T_{0,1}$,
и удовлетворяет условиям

$$f_1^{(3k)}(0) = f_1^{(3k+1)}(\alpha) = 0 \quad , \ k = 0,1,2,... \ ,$$

а $f_2(x)$ регулярна в $T_{1,0}$ и удовлетворяет условиям

$$f_2^{(3k)}(1) = f_2^{(3k+1)}(\alpha) = 0 \quad , \ k = 0,1,2,...$$

Предположим также, что $f_1(x)$ ортогональна системе $\{\psi_{k,2}(x)\}$, а $f_2(x)$ ортогональна системе $\{\psi_{k,1}(x)\}$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям задачи (1) – (2) сходится равномерно на любом отрезке $[a,b]$ из $(0,1)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. 1976. Т.19, № 5. С. 763 – 772.

2. *Freiling G.* Irregulare Mehrpunkt-Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen. HABILITATIONSSCHRIFT dem Fachbereich 11 – Mathematik. Duisburg, 1979.