УДК 517.51

А. В. Шаталина, А. Г. Свистельникова

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ЭРМИТА-ФЕЙЕРА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Пусть AC – множество аналитических в единичном круге $|z|<1$ и непрерывных в его замыкании функций с равномерной нормой

$$\| f \| = \sup_{z\in\{|z|\le 1\}} | f(z) |$$

и обычным модулем непрерывности $\omega(f,\delta)$; $M=\{z_{k,n}\}$ – треугольная матрица узлов интерполирования, $M\in\{|z|=1\}$, $\kappa=0,1,\dots,n-1$, $n=1,2,\dots$

Напомним, M называется правильной матрицей, если узлы каждой её n-й строки являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичный круг.

Пусть $\{H_{2n-1}(M,f,z)\}$ – последовательность многочленов Эрмита-Фейера степени $np-1, p\ge 2$, интерполирующих функцию f в узлах $z_{k,n}$.

Обозначим через Ω множество функций $\omega(\delta)$ типа модуля непрерывности, то есть непрерывных, полуаддитивных, неубывающих на полуоси $[0;\infty)$ функций таких, что $\omega(0)=0$. Каждую функцию $\omega(\delta)\in\Omega$ назовем мажорантой.

Введём классы, заданные мажорантой:

$AC(\omega), \omega\in\Omega,$ – класс функций $f\in AC$, у которых $\omega(f,\delta)=O(\omega(\delta))$,

$AC^*(\omega), \omega\in\Omega,$ – класс функций $f\in AC$, у которых $\omega(f,\delta)=o(\omega(\delta))$.

Известно [1], что для любой функции $f\in AC$ интерполяционный процесс Эрмита-Фейера, построенный по правильной матрице, сходится к ней равномерно внутри круга. С. М. Лозинский [2] доказал существование функции $f\in AC$ такой, что последовательность многочленов не сходится к функции f в точке $z=1$. Достаточным условием равномерной сходимости в замкнутом круге [1] является условие

$$\lim_{n\to\infty}\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\ln n=0. \qquad (1)$$

Если рассматривать функции из введённых классов $AC(\omega)$ или $AC^*(\omega)$, то для них условие (1) очевидно перепишется следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n=0 \qquad (2)$$

или

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n<\infty. \qquad (3)$$

Будут ли условия (2) и (3) не только достаточными, но и необходимыми для этих классов?

В качестве M рассмотрим конкретную матрицу узлов интерполирования, составленную из корней n-й степени из (-1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n>0. \qquad (4)$$

Тогда существует функция $f\in AC(\omega)$, для которой процесс Эрмита-Фейера расходится всюду на единичной окружности.

Если выполнено условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n=\infty, \qquad (5)$$

то существует функция $f\in AC^{*}(\omega)$, для которой процесс Эрмита-Фейера неограниченно расходится всюду на единичной окружности.

Для произвольных правильных матриц с некоторым ограничением на распределение узлов найдена метрическая характеристика множества точек расходимости рассматриваемых процессов.

Определение. Говорят, что матрица узлов интерполирования M удовлетворяет условию (B_m), пишут $M\in(B_m)$, если для любого ε, $0<\varepsilon<1$,, существуют числа $q=q(\varepsilon)$, m, для которых можно указать последовательность номеров $\{n_i\}$ такую, что для любого натурального μ существует натуральное ν, для которых

$$\varepsilon\cdot\sum_{i=\mu}^{\nu}\frac{1}{n_i}\geq 2\pi, \qquad n_\nu\leq n_\mu^{q},$$

и все узлы z_{k,n_j}, z_{k,n_i}, $\mu\leq i\neq j\leq\nu$, расстояние между которыми меньше n_μ^{-2q}, принадлежат множеству B_m, содержащему не более m дуг окружности $|z|=1$, длиной меньше $2n_\mu^{-2q}$ каждая.

Примером таких матриц могут служить матрицы корней n-й степени из любого комплексного числа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M\in(B_m)$ – правильная матрица, и выполнено условие (4). Тогда существует функция $f\in AC(\omega)$, для которой процесс Эрмита-Фейера расходится почти всюду на единичной окружности, то есть $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|f(z)-H_{2n-1}(M,f,z)\right|>0$, причём $\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|f(z)-H_{2n-1}(M,f,z)\right|=0$.

Если выполнено условие (5), то существует функция $f\in AC^{*}(\omega)$, для которой процесс Эрмита-Фейера неограниченно расходится почти всюду на единичной окружности, то есть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f(z)-H_{2n-1}(M,f,z)|=\infty$, причём $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f(z)-H_{2n-1}(M,f,z)|=0$.

Сформулированные выше результаты ранее были получены для интерполяционного процесса Лагранжа [3]. Разработанный в [3] метод построения функций из класса $AC(\omega)$ или $AC^*(\omega)$, для которых процесс Лагранжа, построенный по правильной матрице $M\in(B_m)$ (либо по матрице корней n-й степени из (-1)), расходится почти всюду (либо всюду) на единичной окружности, применим для исследования других интерполяционных процессов. Установлено, что многочлены Эрмита-Фейера можно представить как сумму интерполяционного многочлена, аналогичного многочлену Лагранжа и некоторого «добавочного» слагаемого. Получены удобные для дальнейших рассуждений оценки этого слагаемого, что позволило использовать уже известные факты для построения функций с нужными свойствами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Смирнов В.И., Лебедев Н.А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.

2. *Лозинский С.М.* Об интерполяционном процессе Fejer`a // ДАН СССР. 1939. Т. 24. С. 318 – 321.

3. *Шаталина А.В.* Расходимость интерполяционных процессов Лагранжа на единичной окружности. Саратов, 1990. 30 с. Деп.в ВИНИТИ 19.07.90, № 4060-В90.

УДК 517.95

В. А. Юрко

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ БУССИНЕСКА НА ПОЛУОСИ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ*

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_t=i(2v_x-u_{xx}),\quad 3v_t=i(3v_{xx}-2u_{xxx}-2uu_x),\quad x\ge 0,\quad t\ge 0, \tag{1}$$

$$u_{|t=0}=u_0(x),\quad v_{|t=0}=v_0(x),\quad u_0(x),v_0(x)\in L(0,\infty), \tag{2}$$

$$u_{|x=0}=u_1(t),\quad u_{x|x=0}=u_2(t),\quad v_{|x=0}=v_1(t),\quad v_{x|x=0}=v_2(t). \tag{3}$$

Система (1) после исключения $v(x,t)$ сводится к уравнению Буссинеска

$$3u_{tt}=u_{xxxx}+2(u^2)_{xx}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).