на единичной окружности, то есть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|f(z)-H_{2n-1}(M,f,z)\right|=\infty$, причём $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|f(z)-H_{2n-1}(M,f,z)\right|=0$.

Сформулированные выше результаты ранее были получены для интерполяционного процесса Лагранжа [3]. Разработанный в [3] метод построения функций из класса $AC(\omega)$ или $AC^{*}(\omega)$, для которых процесс Лагранжа, построенный по правильной матрице $M\in(B_m)$ (либо по матрице корней n-й степени из (-1)), расходится почти всюду (либо всюду) на единичной окружности, применим для исследования других интерполяционных процессов. Установлено, что многочлены Эрмита-Фейера можно представить как сумму интерполяционного многочлена, аналогичного многочлену Лагранжа и некоторого «добавочного» слагаемого. Получены удобные для дальнейших рассуждений оценки этого слагаемого, что позволило использовать уже известные факты для построения функций с нужными свойствами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Смирнов В.И., Лебедев Н.А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.

2. *Лозинский С.М.* Об интерполяционном процессе Fejer`a // ДАН СССР. 1939. Т. 24. С. 318 – 321.

3. *Шаталина А.В.* Расходимость интерполяционных процессов Лагранжа на единичной окружности. Саратов, 1990. 30 с. Деп.в ВИНИТИ 19.07.90, № 4060-В90.

УДК 517.95

В. А. Юрко

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ БУССИНЕСКА НА ПОЛУОСИ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ*

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_t=i(2v_x-u_{xx}),\quad 3v_t=i(3v_{xx}-2u_{xxx}-2uu_x),\quad x\ge 0,\quad t\ge 0, \tag{1}$$

$$u_{|t=0}=u_0(x),\quad v_{|t=0}=v_0(x),\quad u_0(x),v_0(x)\in L(0,\infty), \tag{2}$$

$$u_{|x=0}=u_1(t),\quad u_{x|x=0}=u_2(t),\quad v_{|x=0}=v_1(t),\quad v_{x|x=0}=v_2(t). \tag{3}$$

Система (1) после исключения $v(x,t)$ сводится к уравнению Буссинеска

$$3u_{tt}=u_{xxxx}+2(u^2)_{xx}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).

Система (1) имеет пару Лакса, и поэтому краевая задача (1)-(3) может быть решена методом обратной спектральной задачи [1]. При этом спектральная задача соответствует линейному дифференциальному уравнению 3-го порядка, а в качестве основной спектральной характеристики берется матрица Вейля-Юрко этого оператора [2, 3].

Обозначим через J_n множество функций $f(x,t)$ таких, что функции $\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial t^k} f(x,t), \quad 0 \le j+2k \le n$ непрерывны при $x \ge 0, \quad t \ge 0$, интегрируемы на полуоси $x \ge 0$ при любом фиксированном $t > 0$, и $x \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x,t) \in L(0,\infty)$. Будем говорить, что $\{u(x,t), v(x,t)\} \in P$, если $u(x,t) \in J_3, v(x,t) \in J_2$. Решение задачи (1)-(3) будем искать в классе P.

Пусть $\{u(x,t), v(x,t)\}$ – решение задачи (1)-(3). При фиксированном $t \ge 0$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка относительно x:

$$\ell y := y''' + uy' + vy = \lambda y, \quad x \ge 0.$$

Пусть $M_{mj}(t,\lambda), \ 1 \le m < j \le 3$ – функции Вейля-Юрко для ℓ, соответствующие линейным формам $U_\xi(y) := y^{(\xi-1)}(0), \quad \xi = \overline{1,3}$ (см. [2]-[3]). Обозначим $M^0_{mj}(\lambda) = M_{mj}(0,\lambda)$ – функции Вейля-Юрко для начальных данных $\{u_0, v_0\}$. Для случая полуоси $x \ge 0$ эволюционные уравнения на функции Вейля-Юрко являются нелинейными. Однако их можно свести к цепочке двух последовательно решаемых уравнений Риккати, каждое из которых, в свою очередь, может быть сведено к системе линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Точнее, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$Z_1(t,\lambda) := \begin{bmatrix} M_{12}(t,\lambda) \\ M_{13}(t,\lambda) \end{bmatrix}, \ Z_2(t,\lambda) := M_{23}(t,\lambda),$$

$$Z^0_1(\lambda) := \begin{bmatrix} M^0_{12}(\lambda) \\ M^0_{13}(\lambda) \end{bmatrix}, \ Z^0_2(\lambda) := M^0_{23}(\lambda),$$

и пусть

$$F_1 = iu_1/3, \ F_2 = i(\lambda - v_1 + 2u_2/3), \ F_3 = i(\lambda - v_1 + u_2/3), \ F_4 = i(v_2 + 2i\frac{\partial}{\partial t}u_1)/3.$$

Тогда $Z_k(t,\lambda), \quad k = 1,2$, являются решениями следующих задач Коши для уравнений Риккати:

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_k = A_k + B_k Z_k - Z_k C_k - Z_k D_k Z_k, \quad k = 1,2, \tag{4}$$

$$Z_k(0,\lambda) = Z_k^0(\lambda), \qquad (5)$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -F_1 & 0 \\ F_3 & -F_1 \end{bmatrix},$$
$$C_1 = 2F_1, \quad D_1 = [0, i],$$
$$A_2 = F_3, \quad B_2 = -F_1 - iM_{13},$$
$$C_2 = -F_1, \quad D_2 = -iM_{12}.$$

Используя лемму Радона [4, с. 212], можно записать решение задачи Коши (4)-(5) в виде

$$Z_k(t,\lambda) = \frac{1}{W_k(t,\lambda)} Y_k(t,\lambda), \quad k = 1,2, \qquad (6)$$

где $W_k(t,\lambda)$ и $Y_k(t,\lambda)$ являются решениями следующих задач Коши для линейных систем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} W_k \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ A_k & B_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_k \\ Y_k \end{bmatrix} \qquad (7)$$

при начальных условиях

$$W_k(t,\lambda) = 1, \qquad Y_k(0,\lambda) = Z_k^0(\lambda). \qquad (8)$$

Таким образом, мы получаем следующий алгоритм решения краевой задачи (1)-(3) для системы Буссинеска.

Алгоритм 1. (1) *По начальным данным* $\{u_0, v_0\}$ *строим функции Вейля-Юрко* $M_{mj}^0(\lambda)$, $1 \le m < j \le 3$.

(2) *Последовательно при* $k = 1,2$ *вычисляем* $Z_k(t,\lambda)$ *по формулам* (6), *где* $W_k(t,\lambda)$ *и* $Y_k(t,\lambda)$ *находятся из* (7)-(8). *Тем самым построены функции Вейля-Юрко* $M_{mj}(t,\lambda)$, $1 \le m < j \le 3$.

(3) *Находим функции* $\{u(x,t), v(x,t)\}$, *решая обратную спектральную задачу по функциям Вейля-Юрко* $M_{mj}(t,\lambda)$, $1 \le m < j \le 3$, *методом спектральных отображений* [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Deift P., Tomei C., Trubowitz E.* Inverse scattering and the Boussinesq equation // Comm. Pure Appl. Math. 1982. Vol. 35. P. 567 – 628.

2. *Yurko V.*A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.

3. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001. 499 с.

4. *Freiling G., Yurko V.A.* Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications. N. Y.: NOVA Science Publishers, 2001. 305 p.