УДК 629

Ю. В. Афанасьева, Ю. Н. Челноков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВЫХ КВАТЕРНИОННЫХ ОСКУЛИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ*

Рассматривается задача о встрече в центральном ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата (КА) с неуправляемым КА, движущимся по эллиптической кеплеровской орбите.

Задача о встрече двух КА формулируется как задача оптимального управления движением центра масс управляемого КА с подвижным правым концом траектории и решается на основе принципа максимума Понтрягина.

Для описания ориентации мгновенной орбиты управляемого КА используется новый кватернионный оскулирующий элемент орбиты, заменяющий собой три классических угловых элемента орбиты управляемого КА.

1. Постановка задачи. Поставим следующую задачу: требуется построить ограниченное по модулю управление **p**:

$$0 \le p \le p_{max} < \infty, \; p = |\mathbf{p}|, \tag{1}$$

переводящее КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]

$$\begin{gathered} v_1^{\cdot} = c^2 r^{-3} - fMr^{-2} + p_1,\; r^{\cdot} = v_1,\; c^{\cdot} = rp_2, \\ \varphi_{tr}^{\cdot} = cr^{-2} + r(c^2 - fMr)^{-1}\cos\varphi_{tr}(cp_1\cos\varphi_{tr} - (c + fMrc^{-1})p_2\sin\varphi_{tr}), \\ 2(\boldsymbol{\Lambda}^{or})^{\cdot} = \boldsymbol{\Lambda}^{or} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi, \\ \boldsymbol{\Omega}_\xi = \Omega_1\mathbf{i}_1 + \Omega_2\mathbf{i}_2 + \Omega_3\mathbf{i}_3 = (r/c)p_3(\cos\varphi_{tr}\mathbf{i}_1 + \sin\varphi_{tr}\mathbf{i}_2) - \\ - r(c^2 - fMr)^{-1}\cos\varphi_{tr}(cp_1\cos\varphi_{tr} - (c + fMr/c)p_2\sin\varphi_{tr})\mathbf{i}_3, \\ (\varphi^*)^{\cdot} = c^*(r^*)^{-2},\; r^* = p^*(1 + e^*\cos\varphi^*)^{-1}, \end{gathered} \tag{2}$$

из заданного начального состояния

$$\begin{gathered} t_0 = 0,\, r(0) = r^0,\, v_1(0) = v_1^0,\, c(0) = c^0,\, \varphi_{tr}(0) = \varphi_{tr}^0,\, \Lambda_j^{or}(0) = (\Lambda_j^{or})^0,\, (j = 0..3), \\ \varphi^*(0) = \varphi_0^*, \end{gathered} \tag{3}$$

в конечное состояние, удовлетворяющее соотношениям

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00988).

$$r(t_k) = r^*(t_k) = p^*/(1 + e^*\cos\varphi_k^*),\ v_1(t_k) = v_1^*(t_k) = (e^*c^*/p^*)\sin\varphi_k^*,$$
$$c(t_k) = c^*(t_k),$$
$$\mathbf{A}_v = \mathrm{vect}(\overline{\mathbf{\Lambda}^{or}}(t_k) \circ \mathbf{\Lambda}^*) = 0 \qquad (4)$$
(здесь $\overline{\mathbf{\Lambda}^{or}} = \Lambda_0^{or} - \Lambda_1^{or}\,\mathbf{i}_1 - \Lambda_2^{or}\,\mathbf{i}_2 - \Lambda_3^{or}\,\mathbf{i}_3$ – кватернион, сопряжённый к $\mathbf{\Lambda}^{or}$), и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{t_k} (1 + \alpha p^2(t))dt,\ \alpha = \mathrm{const} \geq 0.$$

В уравнениях (1) – (4) f – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела, **p** – вектор ускорения от тяги реактивного двигателя, v_1, r, c, φ_{tr}, $\mathbf{\Lambda}^{or}$ – фазовые координаты управляемого КА; v_1, r, c характеризуют форму и размеры мгновенной орбиты управляемого КА, угловая переменная φ_{tr} характеризует положение управляемого КА на орбите, $\mathbf{\Lambda}^{or}$ – кватернионный оскулирующий элемент орбиты управляемого КА, характеризующий ее мгновенную ориентацию, $\mathbf{\Lambda}^*$ = const – кватернион ориентации орбиты неуправляемого КА, величины со звездочками описывают движение неуправляемого КА.

2. **Необходимые условия оптимальности**. Задачу решаем, используя принцип максимума Понтрягина. Вводим дополнительную переменную g, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $g^{\cdot} = 1 + \alpha p^2$ и начальному условию g(0) = 0. Вводим сопряжённые переменные ρ, s_1, e, χ_{tr}, M_j^{or}, Φ^* и ψ_0, соответствующие фазовым переменным r, v_1, c, φ_{tr}, Λ_j^{or}, φ^* и переменной g.

Функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_0(1 + \alpha p^2) + \rho v_1 + s_1(c^2r^{-3} - fMr^{-2} + p_1) + erp_2 + \chi_{tr}cr^{-2} +$$
$$+ (\chi_{tr} - (1/2)N_3^{or})r(c^2 - fMr)^{-1}\cos\varphi_{tr}(cp_1\cos\varphi_{tr} - (c + fMrc^{-1})p_2\sin\varphi_{tr}) +$$
$$+ (1/2)(N_1^{or}\cos\varphi_{tr} + N_2^{or}\sin\varphi_{tr})rc^{-1}p_3 + \Phi^*c^*(p^*)^{-2}(1 + e^*\cos\varphi^*)^2, \qquad (5)$$
где $\alpha \geq 0$; N_1^{or}, N_2^{or}, N_3^{or} – компоненты кватерниона
$$\mathbf{N}^{or} = N_0 + N_1\mathbf{i}_1 + N_2\mathbf{i}_2 + N_3\mathbf{i}_3 = \overline{\mathbf{\Lambda}^{or}} \circ \mathbf{M}^{or}.$$

Сопряжённая система уравнений имеет вид
$$s_1^{\cdot} = -\rho,\ \rho^{\cdot} = F_1(s_1, c, r, \chi_{tr}, e, \mathbf{p}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}),\ e^{\cdot} = F_2(s_1, c, r, \chi_{tr}, \mathbf{p}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}),$$
$$\chi_{tr}^{\cdot} = F_3(c, r, \chi_{tr}, \mathbf{p}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}),\ (\Phi^*)^{\cdot} = 2c^*e^*(p^*)^{-2}\Phi^*(1 + e^*\cos\varphi^*)\sin\varphi^*,$$
$$2(\mathbf{M}^{or})^{\cdot} = \mathbf{M}^{or} \circ \mathbf{\Omega}_Z^*,\ \mathbf{\Omega}_Z^* = \mathbf{\Omega}_\xi, \qquad (6)$$
$$\psi_0^{\cdot} = 0. \qquad (7)$$

В дальнейшем в силу принципа максимума и уравнения (7) в выражении (5) для функции H множитель ψ_0 полагается равным – 1.

Оптимальное управление $\mathbf{p}^0$, найденное из условия максимума функции H, определяемой соотношением (5), по переменной **p** с учётом ограничения (1) имеет вид
$$\mathbf{p}_\eta^{\,0} = p_1^{\,0}\,\mathbf{i}_1 + p_2^{\,0}\,\mathbf{i}_2 + p_3^{\,0}\,\mathbf{i}_3 = p^0\,\mathbf{n}_\eta / |\mathbf{n}|, \qquad (8)$$
$$\mathbf{n}_\eta = G_1(s_1, r, c, e, \chi_{tr}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}),$$
где p^0 при $\alpha > 0$ определяется соотношениями

$$p^0 = \begin{cases} (2\alpha)^{-1}|n|, \text{ если } (2\alpha)^{-1}|n| \le p_{\max}, \\ p_{\max}, \text{ если } (2\alpha)^{-1}|n| > p_{\max}, \end{cases} \tag{9}$$

а при $\alpha = 0$ – соотношением

$$p^0 = p_{\max}. \tag{10}$$

Условия трансверсальности на правом конце траектории после исключения неопределённых множителей Лагранжа принимают вид:
при $t = t_k$

$$\Lambda_0{}^*M_0{}^{or} + \Lambda_1{}^*M_1{}^{or} + \Lambda_2{}^*M_2{}^{or} + \Lambda_3{}^*M_3{}^{or} = 0,$$

$$\Phi^* + \rho e^* p^*(1 + e^*\cos\varphi^*)^{-2}\sin\varphi^* + s_1 e^* c^*(p^*)^{-1}\cos\varphi^* = 0,$$

$$\chi_{tr} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию восемнадцати дифференциальных уравнений (2), (6) – (10), относительно переменных r, v_1, c, φ, Λ_j, M_j, $(j = 0..3)$, φ^*, ρ, s_1, e, χ_{tr}, Φ^*. При интегрировании уравнений появится восемнадцать произвольных постоянных интегрирования, девятнадцатым неизвестным будет время t_k. Для определения постоянных и времени t_k имеем девятнадцать условий: пятнадцать граничных условий (3) – (4), три условия трансверсальности (11) и равенство гамильтониана нулю в конечный момент времени, имеющее место для оптимального управления p^0.

3. Анализ задачи. Уравнения задачи имеют первые интегралы:

$$\|\mathbf{\Lambda}^{or}\|^2 = 1,\ \|\mathbf{M}^{or}\|^2 = \text{const},\ H\,(r, v_1, c, \varphi_{tr}, \mathbf{\Lambda}^{or}, \varphi^*, \rho, \chi_{tr}, \mathbf{M}^{or}, \Phi^*, \mathbf{p}^0) = 0,$$

$$\mathbf{M}^{or} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}^{or}} = \mathbf{N}^* = \text{const},\ \Phi^*(1 + e^*\cos\varphi^*)^2 = C_\varphi = \text{const}.$$

Использование двух последних интегралов и кватернионной замены переменных $\mathbf{N}^{or} = \overline{\mathbf{\Lambda}^{or}} \circ \mathbf{M}^{or}$ позволяет понизить порядок системы на шесть единиц без усложнения правых частей уравнений. Правые части уравнений (6) F_1, F_2, F_3 являются сложными функциями фазовых и сопряжённых переменных. Анализ этих уравнений показал, что при выполнении условия $\chi_{tr} = (1/2)N_3{}^{or}$ уравнения и соотношения краевой задачи существенно упрощаются, а порядок системы понижается ещё на единицу. Численное решение задачи показало, что указанное условие для изучаемых параметров задачи выполняется.

Заключение. В статье сформулирована новая краевая задача принципа максимума, к которой сводится задача о встрече двух КА при использовании новой модели орбитального движения КА.

Эта модель позволяет наиболее эффективно рассматривать общую задачу оптимального управления движением КА как композицию двух взаимосвязанных задач: задачи управления формой и размерами орбиты КА и задачи управления ориентацией орбиты КА, поскольку введённый новый кватернионный оскулирующий элемент непосредственно характеризует собой ориентацию мгновенной орбиты КА, в отличие от других, ранее использованных кватернионных переменных.

Получены первые интегралы уравнений краевой задачи, установлено условие, при выполнении которого уравнения краевой задачи существенно упрощаются.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 1. С. 92 – 107.

УДК 539.3

К. Г. Бахтин, В. Н. Михайлов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСЧЁТА КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим упругий призматический стержень, составленный из различных материалов. Пусть постоянное по длине многосвязное поперечное сечение стержня D образуется из областей $D_1, D_2, \ldots, D_M$, соответствующих материалам с различными модулями сдвига $G_1, G_2, \ldots, G_M$. Обозначим через D_0 область, внешнюю к D; через Γ_0 – внешнюю границу области D; через Γ_k, $k = 1,2,\ldots,l$ – границы внутренних полостей и через L_{ij} – линии раздела между подобластями D_i и D_j. Поместим начало декартовой системы координат (x, y, z) в некоторой произвольной точке торцевого сечения стержня, направив ось z параллельно образующей боковой поверхности стержня. Известно [1], что задача расчёта кручения стержней сводится к решению уравнений Пуассона для функций напряжения $U_i(x, y)$ в каждой подобласти D_i

$$\nabla^2 U_i(x, y) = -2G_i, i = 1,2,\ldots,M. \tag{1}$$

На границах L_{ij} между областями D_i и D_j должны выполняться условия сопряжения

$$U_i(x, y) = U_j(x, y),\ \frac{1}{G_i}\frac{\partial U_i(x, y)}{\partial n_{ij}} = \frac{1}{G_j}\frac{\partial U_j(x, y)}{\partial n_{ij}}, (x, y) \in L_{ij}, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_{ij}}$ – производная по внешней к подобласти D_i нормали. На внешней границе Γ_0 и на границах полостей Γ_k, $k = 1,2,\ldots,l$ функция напряжений $U(x, y)$ должна удовлетворять граничному условию первого рода

$$U(x, y) = c_k, (x, y) \in \Gamma_k, k = 0,1,\ldots,l. \tag{3}$$

Постоянные c_k не известны (c_0 можно положить равной нулю) и находятся из условий