Получены первые интегралы уравнений краевой задачи, установлено условие, при выполнении которого уравнения краевой задачи существенно упрощаются.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 1. С. 92 – 107.

УДК 539.3

К. Г. Бахтин, В. Н. Михайлов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСЧЁТА КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим упругий призматический стержень, составленный из различных материалов. Пусть постоянное по длине многосвязное поперечное сечение стержня D образуется из областей $D_1, D_2, \ldots, D_M$, соответствующих материалам с различными модулями сдвига $G_1, G_2, \ldots, G_M$. Обозначим через D_0 область, внешнюю к D; через Γ_0 – внешнюю границу области D; через Γ_k, $k = 1,2,\ldots,l$ – границы внутренних полостей и через L_{ij} – линии раздела между подобластями D_i и D_j. Поместим начало декартовой системы координат (x, y, z) в некоторой произвольной точке торцевого сечения стержня, направив ось z параллельно образующей боковой поверхности стержня. Известно [1], что задача расчёта кручения стержней сводится к решению уравнений Пуассона для функций напряжения $U_i(x, y)$ в каждой подобласти D_i

$$\nabla^2 U_i(x, y) = -2G_i, i = 1,2,\ldots,M. \qquad (1)$$

На границах L_{ij} между областями D_i и D_j должны выполняться условия сопряжения

$$U_i(x, y) = U_j(x, y),\ \frac{1}{G_i}\frac{\partial U_i(x, y)}{\partial n_{ij}} = \frac{1}{G_j}\frac{\partial U_j(x, y)}{\partial n_{ij}}, (x, y) \in L_{ij}, \qquad (2)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_{ij}}$ – производная по внешней к подобласти D_i нормали. На внешней границе Γ_0 и на границах полостей Γ_k, $k = 1,2,\ldots,l$ функция напряжений $U(x, y)$ должна удовлетворять граничному условию первого рода

$$U(x, y) = c_k, (x, y) \in \Gamma_k, k = 0,1,\ldots,l. \qquad (3)$$

Постоянные c_k не известны (c_0 можно положить равной нулю) и находятся из условий

$$\int_{\Gamma_k} \frac{1}{G_i} \frac{\partial U_i}{\partial n} ds = -2\Omega, k = 1,2,\ldots,l, \tag{4}$$

где Ω – площадь полости, ограниченной контуром Γ_k и индекс i принимает значения номеров подобластей D_i, которые пересекает контур Γ_k.

Задача (1) – (3) при известных значениях постоянных $c_k, k = 1,2,...,l$ совпадает с задачей расчёта температурных полей с постоянным тепловыделением и заданной температурой на границах области, которая сведена к граничному интегральному уравнению и решается численно для любых областей [2]. Этот способ может быть применён и для задачи кручения. Вопрос об определении неизвестных постоянных c_k может быть решён с помощью суперпозиции решений [3].

Недостаток такого подхода заключается в том, что на границах L_{ij} между подобластями с различными материалами будут найдены значения функции напряжения, в то время как для вычисления касательных напряжений, что и является целью расчёта кручения стержней, необходимо знать первые производные функции $U(x, y)$. Покажем, что можно получить интегральные уравнения, исключающие этот недостаток.

Пусть (x_0, y_0) – фиксированная точка, тогда для функции $U_i(x_0, y_0)$ имеет место представление [2]

$$P_i(x_0, y_0)U_i(x_0, y_0) = P_i(x_0, y_0)W_i(x_0, y_0) + \int_{L_i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial n_{ij}} \delta - U_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds -$$

$$- \int_{L_i} \left(\frac{\partial W_i}{\partial n_{ij}} \delta - W_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds, i = 1,2,\ldots,M , \tag{5}$$

где L_i – граница подобласти D_i; $P_i(x_0, y_0) = \pi$, если $(x_0, y_0) \in L_i$, $P_i(x_0, y_0) = 0$, если точка (x_0, y_0) лежит вне области D_i, и $P_i(x_0, y_0) = 2\pi$, если $(x_0, y_0) \in D_i$; $\delta = \ln \frac{1}{r}, r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; $W_i(x, y)$ – частное решение уравнения (1).

Граница L_i состоит из участков L_{ij}, $j \in M_i$, где M_i – множество номеров подобластей D_j, граничащих с D_i. Учитывая это, запишем равенства (5) в следующем виде:

$$P_i(x_0, y_0)U_i(x_0, y_0) = P_i(x_0, y_0)W_i(x_0, y_0) + \sum_{j \in M_i} \int_{L_{ij}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial n_{ij}} \delta - U_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds -$$

$$- \sum_{j \in M_i} \int_{L_{ij}} \left(\frac{\partial W_i}{\partial n_{ij}} \delta - W_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds, i = 1,2,...,M .$$

Просуммируем теперь эти соотношения по i от 1 до M :

$$\sum_{i=1}^{M} P_i(x_0,y_0)U_i(x_0,y_0)=\sum_{i=1}^{M} P_i(x_0,y_0)W_i(x_0,y_0)+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j\in M_i}\int_{L_{ij}}\left(\frac{\partial U_i}{\partial n_{ij}}\delta-U_i\frac{\partial\delta}{\partial n_{ij}}\right)ds-$$
$$-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j\in M_i}\int_{L_{ij}}\left(\frac{\partial W_i}{\partial n_{ij}}\delta-W_i\frac{\partial\delta}{\partial n_{ij}}\right)ds. \qquad (6)$$

В этом выражении суммирование по внутренним границам между подобластями D_i и D_j производится дважды – по L_{ij} и L_{ji}. Объединим эти интегралы, при этом условимся оставлять в (6) контуры, для которых $j<i$, т.е. второй индекс меньше первого. Подмножество номеров $j>0$ множества M_i, удовлетворяющих этому требованию, обозначим через M_i^*. Заметим ещё, что на L_{ij} выполняется равенство $\frac{\partial}{\partial n_{ij}}=-\frac{\partial}{\partial n_{ji}}$. С учётом этого и условий (2), (3) соотношение (6) преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^{M} P_i(x_0,y_0)U_i(x_0,y_0)=\sum_{i=1}^{M} P_i(x_0,y_0)G_iW(x_0,y_0)-\sum_{i=1}^{M}\int_{L_{i0}} G_iV\delta\, ds-$$
$$-\sum_{i=1}^{l}c_i\int_{\Gamma_i}\frac{\partial\delta}{\partial n_{i0}}ds+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j\in M_i^*}\left(G_j-G_i\right)\int_{L_{ij}}V\delta\, ds-\sum_{i=1}^{M}G_i\int_{L_{i0}}\left(\frac{\partial W}{\partial n_{ij}}\delta-W\frac{\partial\delta}{\partial n_{ij}}\right)ds-$$
$$-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j\in M_i^*}\left(G_i-G_j\right)\int_{L_{ij}}\left(\frac{\partial W}{\partial n_{ij}}\delta-W\frac{\partial\delta}{\partial n_{ij}}\right)ds. \qquad (7)$$

Здесь $V=-\frac{1}{G_i}\frac{\partial U_i}{\partial n_{ij}},\ W_i=G_iW,\ W=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

Если точка (x_0,y_0) – внутренняя точка подобласти D_i, то

$$\sum_{i=1}^{M} P_i(x_0,y_0)U_i(x_0,y_0)=2\pi U_k(x_0,y_0),\ \sum_{i=1}^{M} P_i(x_0,y_0)W_i(x_0,y_0)=2\pi G_kW(x_0,y_0).$$

В соотношение (7) входят интегралы только по внешним и внутренним границам области D. Возьмём в (7) точку (x_0,y_0) на границе области, тогда (7) будет являться граничным интегральным уравнением относительно функции $V(x,y)$, способ численного решения которого подробно изложен в [2]. Зная функцию V, можно найти касательное напряжение на внешних и внутренних границах области. Для нахождения напряжений во внутренних точках необходимо продифференцировать выражение (7) по x_0 и y_0, что не вызывает принципиальных трудностей.

Для жёсткости C при кручении составного стержня имеет место формула

$$C=2\iint_D U(x,y)dxdy=-2\sum_{i=1}^{M}G_i\iint_{D_i}f\,dxdy+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j\in M_i^*}\left(G_i-G_j\right)\int_{L_{ij}}Vf\,ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{M} G_i \int_{L_{i0}} Vf\,ds + \sum_{i=1}^{l} c_i \int_{\Gamma_i} \frac{\partial f}{\partial n_{ij}}\,ds\,,$$

где $f=\frac{1}{2}x^2$ и интеграл по области D_i от $f(x)$ может быть сведён к интегралу по границе D_i согласно [4]. Таким образом, жёсткость зависит только от функции $V(x,y)$ на внешних и внутренних границах области D.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.

2. *Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.

3. *Вабищевич П.Н.* Задачи упругого кручения цилиндрических стержней // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 63 – 72.

4. *Михайлов В.Н.* Автоматизация вычисления интегралов по плоским областям на ЭВМ // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. Вып. 9. С. 109 – 112.

УДК 551.5: 633.11

А. Л. Брежнев, И. А. Чернов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЯТНА ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПО СКЛОНУ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ В ПОЧВУ

Предложена математическая модель, описывающая движение жидкой массы по наклонной поверхности с учётом фильтрации её в почву, что представляет интерес при расчёте экологического риска в аварийных ситуациях.

1. Пусть на горизонтальной плоскости при t=0 налит слой жидкости высотой Q. С течением времени за счёт фильтрации толщина слоя $H(t)$ начнет убывать. Рассмотрим сначала пропитку водонасыщенного грунта. Предположим, что вытеснение полное и поршневое, вязкости вытесняющей и вытесняемой жидкостей одинаковы. Если вести отсчёт от гидростатического распределения, то задача формулируется следующим образом:

$$p(z,t) = p_0 + \frac{1}{\beta}\ln(1+\gamma\beta z) + u(z,t)\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z},$$

$$u(z,0)=0,\ u(\infty,t)=0,\ u(0,t)=\gamma H(t),\ H(0)=Q\,.$$

Здесь β – коэффициент объёмной упругости жидкости, $\gamma=\rho g$ – удельный вес жидкости, κ – коэффициент пьезопроводности.