

$H_{\text{нач}}=0.11$ м. Тогда из (2) найдём, что уменьшение слоя с высоты 0.12 м до 0.11 м произойдёт за время $t_{\text{нач}}=0.78$ с при этом из (6) получим скорость $v_{\text{нач}}=0.77$ м/с и перемещение $x_{\text{нач}}=0.31$ м. Используя эти данные как начальные условия, интегрируем систему (6), (7) численно до момента исчезновения слоя. Получаем, что перемещение пятна составит 32.4 м за время 71 с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гос.изд-во тех.-теорет. лит., 1952.

УДК 533.6.011:532.529

Е. Н. Гамаюнова

УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ И ПОТОКИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ УДАРНЫХ ВОЛН

Проблема аналитического исследования ударно-волновых структур и потоков за ними при различных режимах нерегулярных и регулярных взаимодействий относительно слабых (интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0$, $P_{20} = (p_2 - p_0)/B_0$, $B_0 = \rho_0 c_0^2$) ударных волн (УВ) (с углом наклона α к вертикали) в газе и газожидкостной среде, характеризуемой параметром $R_0(\gamma)$, вызывает неизменный интерес исследователей.

Анализ общей постановки задачи взаимодействия УВ [1] сводится к построению во внутренних переменных X, Y (δ, Y) решения краевой задачи для компонент скорости u, v системы уравнений коротких волн

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_Y + \mu = 0, \quad \mu_Y = v_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)},$$

$$R/c_0 t = 1 + P_{10} R_0(\gamma) \delta, \quad \theta = P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma) Y, \quad \delta = X + \frac{1}{2} Y^2, \quad (1)$$

$$\frac{u}{c_0} = P_{10} \mu, \quad \frac{v}{c_0} = P_{10}^{3/2} R_0^{1/2}(\gamma) v, \quad \frac{p - p_0}{B_0} = P_{10} P^{(1)}, \quad \frac{p - p_0}{\rho_0} = P_{10} H^{(1)},$$

удовлетворяющей на фронтах УВ (рис. 1) $\delta = \delta^*(Y)$ ($A_1 A_2$ — Маха, $q_n = 0$; $A_1 B_1$ — отражённого, $q_n = 1$; $A_2 B_2$ — отражённого, $q_n = \eta$) условиям

$$\left(\frac{d\delta^*}{dY}\right)^2 = 2\delta - \mu - \mu_1, \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta^*}{dY} = v - v_1, \quad \mu = P^{(1)} = H,$$

$$\mu_1 = q_n, \quad v_1 = -q_n (Y \pm \alpha^v), \quad \alpha^v = \frac{\text{tg } \alpha}{P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma)}, \quad \eta = \frac{P_{10}}{P_{20}} \quad (2)$$

и асимптотическим условиям сращивания на границах с областями линейного (акустического) и квазиодномерного решения (за отражёнными фронтами). α^v, η – параметры подобия задачи.

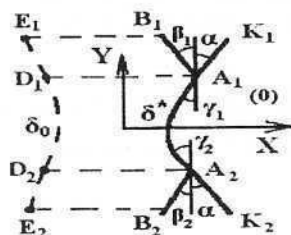


Рис. 1

Для описания течений в области возмущения за фронтами ударных волн используется класс точных параметрических решений (q – параметр) системы (1)

$$\begin{aligned} \mu &= \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q), \quad \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q) \\ v &= \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q), \end{aligned} \quad (3)$$

удовлетворяющий точно условиям (2) при $q = q^* = const$ ($q^* = q_0$ на фронте Маха; $q^* = q_1, q^* = q_2$ на отражённых фронтах).

Для построения полей давления и скоростей будем рассматривать условия динамической совместности (2) на фронтах ударных волн A_1A_2, A_1B_1, A_2B_2 и решения системы коротких волн, точно удовлетворяющие условиям ударного перехода, предложенные Б.И. Заславским (3). Подставляя (3) в систему уравнений коротких волн, переходя от переменных (δ, Y) к (q, Y) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Y , получим систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $\varphi_2(q_k), \dots, \chi_0(q_k)$, которая после приведения к виду, разрешённому относительно производных, и решения с помощью программы аналитических вычислений "REDUS", имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi'_2 &= \frac{4\varphi_2q - \varphi_2 - 3\psi_3}{2f_0}, \quad \varphi'_1 = \frac{2\chi_1\varphi_2 + 2\varphi_1q - \varphi_1 - 2\psi_2}{2f_0}, \quad \varphi'_0 = \frac{\chi_1\varphi_1 - \varphi_0 - \psi_1}{2f_0}, \\ \chi'_0 &= \frac{-2\chi_0 + \chi_1^2 + 2\varphi_0}{2f_0}, \quad \chi'_1 = \frac{-2\chi_1q - \chi_1 + \varphi_1}{2f_0}, \quad \psi'_3 = \frac{2\varphi_2^2 - \varphi_2q + 3\psi_3q}{f_0}, \quad (4) \\ \psi'_2 &= \frac{-3\chi_1\varphi_2 + 3\chi_1\psi_3 + 6\varphi_1\varphi_2 + 4\psi_2q}{2f_0}, \quad \psi'_0 = \frac{-2\chi_0\varphi_1 + \chi_1\varphi_0 + \chi_1\psi_1 + 2\varphi_0\varphi_1}{2f_0}, \end{aligned}$$

$$\psi_1' = \frac{-4\chi_0\phi_2 - \chi_1\phi_1 + 2\chi_1\psi_2 + 4\phi_0\phi_2 + 2\phi_0q + 2\phi_1^2 + 2\psi_1q}{2f_0},$$

где $f_0 = \phi_2 + 2q^2 - q$.

Начальные условия для интегрирования получаются непосредственно из подстановки точного решения Заславского (3) в условия динамической совместности (2) на фронте, предполагая, что фронтам ударных волн соответствуют значения $q = q^* = const$. После преобразований окончательно получим

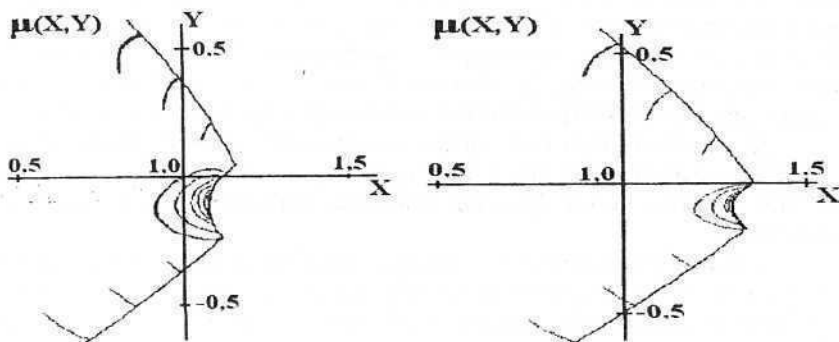
$$\begin{aligned} \phi_2(q^*) &= 2q^*(1-2q^*), \quad \phi_1(q^*) = 2(1-2q^*)\chi_1(q^*), \\ \phi_0(q^*) &= 2\chi_0(q^*) - \chi_1^2(q^*) - \bar{q}^*, \\ \psi_3(q^*) &= -4q^{*2}(1-2q^*), \quad \psi_2(q^*) = -6q^*(1-2q^*)\chi_1(q^*), \\ \psi_1(q^*) &= 2(3q^*-1)\chi_1^2(q^*) - 4q^*\chi_0(q^*) + (4q^*-1)\bar{q}^*, \\ \psi_0(q^*) &= -2\chi_0(q^*)\chi_1(q^*) + \chi_1^3(q^*) + \bar{q}^*(2\chi_1(q^*) \mp \alpha^v). \end{aligned} \quad (5)$$

Анализ решения вблизи фронта Маха показал, что уравнения имеют устранимую особенность $f_0 = 0$ при $q^* = -B$, $B = const$, которая исключается введением новой переменной p

$$p^2 = S(q + B), \quad S = sign(q + B).$$

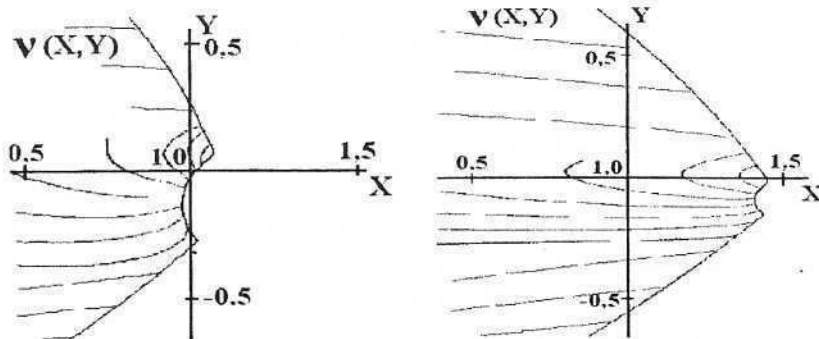
Для отражённых фронтов введение новой переменной не требуется.

На рис. 2, 3 построены поля давлений (плотностей и продольной составляющей скорости) и ударные конфигурации по результатам интегрирования системы (4) при соответствующих условиях (5) на фронтах ударных волн для случаев $\eta = 0.5$, $\alpha^v = 1$ (см. рис. 2) и $\eta = 0.5$, $\alpha^v = 1.5$ (см. рис. 3).



$\eta = 0.5 \quad \alpha^v = 1$

Рис. 2



$$\eta = 0,5 \quad \alpha^* = 1,5$$

Рис. 3

Картины течений характеризуют области больших градиентов параметров за фронтами УВ, отражают особенности развития ударно-волновых структур.

УДК 519.63:533

М. М. Карташов, В. В. Ридель

СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ МЕТОДА ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

В настоящее время широко используются численные методы для нахождения решения краевых задач с системами нелинейных уравнений в частных производных. К ним относятся многие задачи математической физики и механики сплошной среды. Необходимость применения численных методов обусловлена нелинейностью систем дифференциальных уравнений, большими градиентами полей, характеризующих решения.

Для решения этих задач можно использовать разные варианты метода взвешенных невязок [1], в том числе: 1) метод конечных разностей; 2) спектральный метод; 3) метод конечных объёмов; 4) метод конечных элементов.

В статье рассматриваются некоторые особенности применения этих методов в случае решения задач обтекания тел конечных размеров и возможный способ обеспечения необходимых для численных методов качеств.

1. Постановка задачи. Пусть имеется определённый в области D (замкнутое подмножество пространства $\{R^2, t\}$) с границей \bar{D} и гранич-