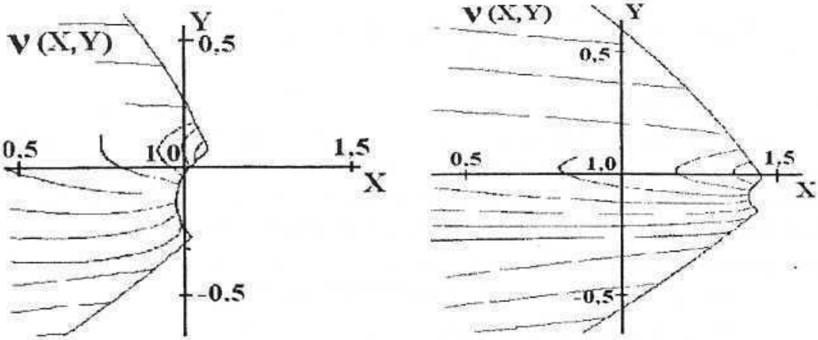

$\eta = 0{,}5 \quad \alpha^{v} = 1{,}5$

Рис. 3

Картины течений характеризуют области больших градиентов параметров за фронтами УВ, отражают особенности развития ударно-волновых структур.

УДК 519.63:533

М. М. Карташов, В. В. Ридель

СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ МЕТОДА ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

В настоящее время широко используются численные методы для нахождения решения краевых задач с системами нелинейных уравнений в частных производных. К ним относятся многие задачи математической физики и механики сплошной среды. Необходимость применения численных методов обусловлена нелинейностью систем дифференциальных уравнений, большими градиентами полей, характеризующих решения.

Для решения этих задач можно использовать разные варианты метода взвешенных невязок [1], в том числе: 1) метод конечных разностей; 2) спектральный метод; 3) метод конечных объёмов; 4) метод конечных элементов.

В статье рассматриваются некоторые особенности применения этих методов в случае решения задач обтекания тел конечных размеров и возможный способ обеспечения необходимых для численных методов качеств.

1. Постановка задачи. Пусть имеется определённый в области D (замкнутое подмножество пространства $\{R^2,\ t\}$) с границей $\overline{D}$ и granичными условиями $F(u)=0$ некоторый дифференциальный оператор для функции $u=u(x,y,t)$:

$$\overline{L}(u)=0, \tag{1}$$

тогда аппроксимирующий его дифференциальный оператор

$$L(u)=R_a, \tag{2}$$

где R_a – невязка, представляющая собой ошибку аппроксимации. Будем предполагать, что приближённое решение можно искать в виде

$$T(x,y,t)=a_{20}(t)x^2+a_{11}(t)xy+a_{02}(t)y^2+a_{10}(t)x+a_{01}(t)y+a_{00}(t), \tag{3}$$

где $a_n(t)$ – зависящие от времени коэффициенты, подлежащие определению. Далее, $R=L(T(x,y,t))$ – невязка от подстановки приближённого решения в аппроксимирующий дифференциальный оператор L.

Сформулируем вариационную задачу для нахождения решения: потребуем, чтобы функционал, характеризующий отклонение приближённого решения от точного во всей области искомого решения D, был равен нулю:

$$\int_D W_n R dD=0, \tag{4}$$

где W_n – некоторые весовые функции, определяющие вариант метода взвешенных невязок.

Выпишем их для метода конечных объёмов (МКО) и метода с минимизацией квадрата невязки (ММКВ) соответственно:

$$W_n=1,\ W_n=\frac{\partial R}{\partial a_n}. \tag{5}$$

В первом случае мы получаем систему уравнений одного порядка с исходной системой дифференциальных уравнений. Во втором случае количество уравнений в системе возрастает в n раз, т.е. она замкнута и имеет порядок аппроксимации выше нулевого. Это отличие позволило предположить возможность комбинирования указанных двух методов для одновременного достижения их нужных качеств (в частности, консервативности).

2. Применение методов. Рассмотрим применение этих методов на примере уравнений движения сплошной среды:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt}+\rho\cdot div(\mathbf{u})=0,\\
&\frac{d(\rho\mathbf{u})}{dt}-div(\tilde{\mathbf{P}})=0,\\
&\frac{d(\rho E)}{dt}-div(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{P}})=0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где ρ – плотность, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, E – полная энергия, $\tilde{\mathbf{P}}$ – тензор внутренних напряжений. Если применить к этой системе МКО, то получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV + \int_\sigma \rho \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_\sigma \rho(\mathbf{u})^2 \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_\sigma \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{E} dV + \int_\sigma \rho \mathrm{E}\mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_\sigma \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{7}$$

Эта система представляет собой формулировку интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. Её можно численно решать при условии, что искомые функции заменяются аппроксимациями нулевого порядка. Так как в этом случае она замкнута.

После применения ММКВ мы получим систему следующего вида:

$$\int_D \frac{\partial R_k}{\partial a_n} R_k dD = 0, \tag{8}$$

где R_k – k-е скалярное уравнение исходной системы после подстановки приближённого решения для ρ, $\mathbf{u}$, E; a_n – n-й коэффициент аппроксимации для искомых функций. Так как всего скалярных функций, определяющих решение, – пять, а для биквадратичной аппроксимации необходимо шесть коэффициентов, всего коэффициентов – тридцать. Несложно подсчитать, что и уравнений тридцать. Итак, имеем замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений линейных относительно производных по времени от определяемых коэффициентов. После интегрирования по пространству решаем дифференциальную задачу для коэффициентов, например методом Эйлера.

При использовании МКО и уравнений механики сплошных сред этот метод обеспечивает консервативную схему для численного решения, что немаловажно для получения сходящегося решения. Как известно [2], в случае ММКВ решение получается с меньшими машинными затратами и более высокой точностью, но численная схема для этого метода не консервативна.

3. Модификация метода. Для того чтобы полученная система ММКВ (8) определяла консервативную схему, нужно первые пять уравнений системы заменить на уравнения из МКО (7). Таким образом, мы получим замкнутую консервативную систему из тридцати уравнений, которые решаются как в ММКВ. Данному методу уже не присущ такой недостаток, как неконсервативность. Рассмотренный подход легко реализуем в рамках уже существующего ПО на базе МКО и ММКВ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. / Пер. с англ. М.: Мир, 1991. Т. 1.

2. Численные методы в динамике жидкостей / Пер. с англ. / Под ред. О.М. Белоцерковского, В.П. Шидловского. М.: Мир, 1981.

УДК 539.9

Л. Ю. Коссович, А. Н. Кушеккалиев

ПОЛЕ РЕЛЕЯ В БЕСКОНЕЧНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

Рассмотрим нестационарное напряжённо-деформированное состояние (НДС) полосы, зависящее от продольной координаты $-\infty < x < \infty$, нормальной координаты $-h \le z \le h$ (h – полутолщина слоя) и времени t. Предположим, что на её поверхностях $z=\pm h$ действуют сосредоточенные силы. Если мы обозначим напряжения через σ_{ij} $(i,\, j=1,2,3)$, то следующие граничные условия на лицевых поверхностях соответствуют этой нагрузке:

$$\sigma_{33} = IH(\tau_2)\delta(\xi_h),\ \sigma_{13}=0 \text{ при } \zeta=\pm 1. \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения: ξ_h, ζ, τ_2 – безразмерные координаты и время $\left(\xi_h = x/h, \zeta = z/h, \tau_2 = tc_2/h\right)$; $H(\tau_2)$ – функция Хевисайда; $\delta(\xi_h)$ – функция Дирака; I –амплитуда нагрузки; υ_i – перемещения $(i=1,3)$; c_2– скорость распространения волны сдвига.

Рассматриваем только однородные начальные условия. Мы также ограничим себя случаем, когда расстояние, пройденное фронтом, соизмеримо с характерным значением длины L $(L >> h)$.

Формальное решение уравнений движения для линейной теории упругости получено с помощью двойного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Формула точного решения для изображения перерезывающего усилия имеет вид

$$N_1^{LF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Ihi\chi\gamma^2}{sD_a}\left[\frac{sh\alpha}{\alpha}ch\beta - ch\alpha\frac{sh\beta}{\beta}\right], \tag{2}$$

где $\quad D_a = \gamma^4\dfrac{sh\alpha}{\alpha}ch\beta - \beta^2\chi^2 ch\alpha\dfrac{sh\beta}{\beta}, \qquad \alpha^2 = \chi^2 + \kappa^2 s^2, \qquad \beta^2 = \chi^2 + s^2,$

$\gamma^2 = \chi^2 + \dfrac{1}{2}s^2$, $\kappa = c_2/c_1$, s – параметр преобразования Лапласа, χ – параметр преобразования Фурье.

Обратим сначала по теореме о вычетах преобразование Лапласа, а затем преобразование Фурье. Рассматриваем решение при $\xi_h > 0$ и точки