БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. / Пер. с англ. М.: Мир, 1991. Т. 1.

2. Численные методы в динамике жидкостей / Пер. с англ. / Под ред. О.М. Белоцерковского, В.П. Шидловского. М.: Мир, 1981.

УДК 539.9

Л. Ю. Коссович, А. Н. Кушеккалиев

ПОЛЕ РЕЛЕЯ В БЕСКОНЕЧНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

Рассмотрим нестационарное напряжённо-деформированное состояние (НДС) полосы, зависящее от продольной координаты $-\infty < x < \infty$, нормальной координаты $-h \le z \le h$ (h – полутолщина слоя) и времени t. Предположим, что на её поверхностях $z=\pm h$ действуют сосредоточенные силы. Если мы обозначим напряжения через σ_{ij} $(i,\ j=1,2,3)$, то следующие граничные условия на лицевых поверхностях соответствуют этой нагрузке:

$$\sigma_{33} = IH(\tau_2)\delta(\xi_h),\ \sigma_{13} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1. \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения: ξ_h, ζ, τ_2 – безразмерные координаты и время $(\xi_h = x/h, \zeta = z/h, \tau_2 = tc_2/h)$; $H(\tau_2)$ – функция Хевисайда; $\delta(\xi_h)$ – функция Дирака; I –амплитуда нагрузки; υ_i – перемещения $(i=1,3)$; c_2– скорость распространения волны сдвига.

Рассматриваем только однородные начальные условия. Мы также ограничим себя случаем, когда расстояние, пройденное фронтом, соизмеримо с характерным значением длины L $(L >> h)$.

Формальное решение уравнений движения для линейной теории упругости получено с помощью двойного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Формула точного решения для изображения перерезывающего усилия имеет вид

$$N_1^{LF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Ihi\chi\gamma^2}{sD_a}\left[\frac{sh\alpha}{\alpha}ch\beta - ch\alpha\frac{sh\beta}{\beta}\right], \tag{2}$$

где $\quad D_a = \gamma^4\dfrac{sh\alpha}{\alpha}ch\beta - \beta^2\chi^2 ch\alpha\dfrac{sh\beta}{\beta}, \qquad \alpha^2 = \chi^2 + \kappa^2 s^2, \qquad \beta^2 = \chi^2 + s^2,$

$\gamma^2 = \chi^2 + \dfrac{1}{2}s^2$, $\kappa = c_2/c_1$, s – параметр преобразования Лапласа, χ – параметр преобразования Фурье.

Обратим сначала по теореме о вычетах преобразование Лапласа, а затем преобразование Фурье. Рассматриваем решение при $\xi_h > 0$ и точки стационарной фазы первой моды при $\chi \to \infty$, т.е. область решения для поля Релея. Здесь имеет место одна из самых существенных составляющих решения – волновая составляющая, обусловленная поверхностными волнами Релея и носящая название поля Релея. Показатели изменяемости и динамичности здесь равны единице. Хорошо известно, что в случае теории типа Тимошенко разрывы соответствующих функций появляются на условном фронте поверхностных волн Релея. Фронт волны сдвига по теории типа Тимошенко, соответствующий фронту волны Релея, является фактически квазифронтом. В его окрестности трёхмерное решение хотя и быстро изменяется, но является непрерывным. В районе фронта поверхностных волн Релея при достаточно больших τ напряжённое состояние имеет тенденцию распадаться на быстро и медленно изменяющиеся компоненты.

Воспользуемся асимптотикой для $\omega_1(\chi)$ при $\chi >> 1$:

$$\omega_1(\chi) = k_R\chi - B\chi\exp(-k\chi), \tag{3}$$

где $k_R = \dfrac{c_R}{c_2} < 1$, $k = 2\sqrt{1-k_R^2}$, $B = \dfrac{2}{\dfrac{k_R}{1-k_R^2} + \dfrac{\kappa^2 k_R}{1-\kappa^2 k_R^2} - \dfrac{4k_R}{2-k_R^2}}$,

c_R – скорость поверхностных волн Релея.

Стационарные точки фазы определяется асимптотикой

$$\chi_s = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{\mu}\right) + \frac{1}{k}\ln\left(\ln\left(\frac{1}{\mu}\right)\right), \tag{4}$$

где $\mu = \dfrac{\xi_0 - k_R k_c \tau_0}{Bk_c\tau_0}$.

Асимптотика функции $F(\chi)$ при $\chi >> 1$ записывается в форме

$$F(\chi) = -\frac{Bk_R^3}{4\pi\left(2-k_R^2\right)\left(1-k_R^2\right)\chi}. \tag{5}$$

Использование формулы метода перевала первого порядка приближения с учётом асимптотики (5) даёт при $\xi_0 - k_R k_c\tau_0 << k_c\tau_0$ следующее приближение:

$$N_1 = 2Ih\frac{C\eta^{1/2}}{\pi^{1/2}k^{1/2}}\frac{\cos(\Omega_1)+\sin(\Omega_1)}{\chi_s(\xi_0 - k_R k_c\tau_0)^{1/2}}, \tag{6}$$

где $\Omega_1 = \dfrac{1+\ln\left(\dfrac{1}{\mu}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{\mu}\right)}\dfrac{\chi_s\left(\xi_0 - k_R k_c\tau_0\right)}{\eta}$.

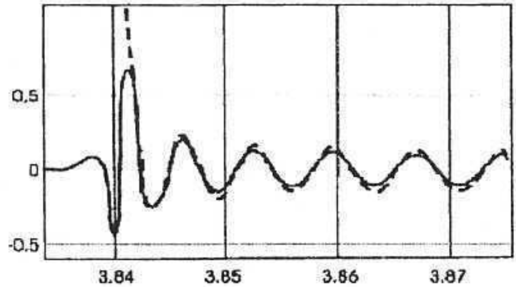
На фронте волны Релея решение (6) даёт разрыв, что противоречит трёхмерной теории упругости.

После обращение преобразования Лапласа с учётом асимптотики подинтегральной функции приведём к виду

$$N_1 = -2\int_0^{\infty} F(\chi)\sin\left(\frac{\chi}{\eta}\left[\left(k_R k_c \tau_0 - \xi_0\right) - Bk_c \tau_0 e^{-k\chi}\right]\right) d\chi, \qquad (7)$$

где $F(\chi)$ определяется выражением (5).

На рисунке представлено поведение перерезывающего усилия в окрестности фронта Релея при $\nu = 0.3$, $k_R^2 = 0.86$, $\eta = 0.01$, $\tau_0 = 7$.



Сплошной линией на рисунке представлено решение, полученное по формуле (7), пунктирной линией – решение по формуле (6). Приближённые вычисление интеграла (7) наглядно продемонстрировали, как сглаживается на квазифронте разрыв решения по формуле (6).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Айнола Л.Я., Нигул У.К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. № 1. С. 3 – 63.

2. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986.

3. *Петрашень Г.И.* Двухмерная задача Лэмба для бесконечного упругого слоя, ограниченного параллельными плоскостями // ДАН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 783 - 786.

4. *Kaplunov J.D., Kossovitch L.Y., Nolde E.V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. N. Y.: Academic Press, 1998.