гралов проводится методом перевала (в качестве большого параметра выбрано $\tau^{(1)}$).

Были проведены расчёты для составной оболочки, элементы которой выполнены из фибро-эпоксидного композита: $\omega^2 = 0.031$, μ=0.1, c=1, D=1. Они показали, что, как и в случае изотропной составной оболочки, существуют области согласования между полученными асимптотиками решений. Для падающей волны это временной интервал $7.0<\tau^{(1)}<12.0$, для отраженной - $11.0<\tau^{(1)}<12.0$. В этих интервалах асимптотики совпадают с точностью 0.03.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи в теории упругих тонких оболочек. Саратов, 1986.

2. *Малинский И.Г., Парфёнова Я.А.* Изгибные волны в составных цилиндрических оболочках // Механика деформируемых сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 14. С. 116 – 122.

УДК 629

Т. В. Пимкина, Ю. Н. Челноков

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПОНИЖЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Рассматривается задача об оптимальном управлении орбитальным движением космического аппарата (КА) в ньютоновском гравитационном поле. Для построения оптимальных управлений и траекторий движения управляемого КА (УКА) используются уравнения движения центра масс КА, записанные во вращающейся системе координат (с.к.), и принцип максимума Понтрягина. В качестве минимизируемого функционала используется интегральный квадратичный функционал качества. Управление (вектор ускорения от тяги реактивного двигателя) полагается ограниченным по модулю. Предложены нелинейные преобразования координат, понижающие размерность краевой задачи оптимизации.

1. Постановка задачи управления. Требуется определить ограниченное по модулю управление $\overline{p}$:

$$0 \le p \le p_{\max} < \infty, \quad p = |\overline{p}|, \tag{1}$$

переводящее КА, движение которого описывается уравнениями [1]

$$\dot{v}_1 = c^2 / r^3 - fM / r^2 + p_1, \quad \dot{r} = v_1, \quad \dot{c} = rp_2, \tag{2}$$

$$2\dot{\overline{\lambda}} = \overline{\lambda} \circ \overline{\omega}_\eta, \;\; \overline{\omega}_\eta = (rp_3 / c)\overline{i}_1 + (c / r^2)\overline{i}_3, \;\; \dot{\varphi}^* = c^*(1 + e^* \cos\varphi^*)^2 / p^{*2}, \tag{3}$$

из заданного начального состояния

$$t_0 = 0: r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \quad c(0) = c^0, \quad \overline{\lambda}(0) = \overline{\lambda}^0, \ \varphi^*(0) = \varphi_0^* \quad (4)$$

в конечное состояние, удовлетворяющее соотношениям

$$\text{при } t = t_k : r = r^* = p^*/(1 + e^* \cos\varphi_k^*), \quad v_1 = v_1^* = \left(e^* c^* \sin\varphi_k^*\right)/p^*, \quad c = c^* \quad (5)$$

$$vect(\tilde{\overline{\lambda}}(t_k) \circ \overline{\lambda}^*(t_k)) = 0, \ \overline{\lambda}_k^* = \overline{\Lambda}^* \circ \left[\cos\left(\varphi_k^*/2\right) + \bar{i}_3 \sin\left(\varphi_k^*/2\right)\right], \quad \varphi_k^* = \varphi^*(t_k) \quad (6)$$

и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{t_k} \left(\alpha_1 + \alpha_2 p^2(t)\right) dt, \ \alpha_1, \alpha_2 = const \geq 0. \quad (7)$$

Входящие в (3), (4) – (6) переменные и параметры $r^*, v_1^*, c^*, \overline{\lambda}^*, \overline{\Lambda}^*, \varphi^*$, p^*, e^* описывают движение в центральном ньютоновском гравитационном поле неуправляемого КА (НКА), с которым должен встретится УКА. Здесь $\bar{r}^*, \overline{V}^*, \bar{c}^* = \bar{r}^* \times \overline{V}^* = const$ – радиус-вектор, вектор скорости и векторный интеграл площадей НКА соответственно; $r^* = |\bar{r}^*|$, $c^* = |\bar{c}^*| = const$; v_1^* – проекция вектора скорости $\overline{V}^*$ на ось η_1^* с.к. η^* (оси η_1^* и η_3^* направлены вдоль векторов $\bar{r}^*$ и $\bar{c}^*$ соответственно); $\overline{\lambda}^*$ – кватернион ориентации с.к. η^* в инерциальной с.к. X, $\tilde{\overline{\lambda}}$ – сопряжённый кватернион, $\overline{\Lambda}^* = const$ – кватернион ориентации орбиты НКА, компоненты Λ_j^*, $j = \overline{0,3}$ которого могут быть выражены через постоянные угловые элементы орбиты $\Omega_u^*, I^*, \omega_\pi^*$ этого КА; φ^* – истинная аномалия НКА; p^*, e^* – параметр и эксцентриситет орбиты НКА. Величины $p^*, e^*, c^*, \overline{\Lambda}^*, \varphi_0^*$ считаются заданными. Отметим, что конечное значение φ_k^* истинной аномалии φ^*, характеризующее конечное положение НКА на его орбите, не фиксируется и подлежит определению в результате решения задачи, кроме этого, конечное состояние УКА принадлежит многообразию (5), (6), содержащему φ_k^*, поэтому данная задача является задачей с подвижным правым концом. Функционал (7) характеризует расход энергии на перевод КА из начального в конечное состояние и время, затрачиваемое на этот перевод. При $dm/dt = const$ (m – масса НКА) данный функционал характеризует расход массы КА и время, затрачиваемое на перевод КА из начального в конечное состояние. При $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ функционал $J = t_k$ (задача быстродействия).

2. Необходимые условия оптимальности. Поставленная задача решается на основе принципа максимума Понтрягина. Для этого вводятся сопряжённые переменные $\overline{\mu}$, ρ, s_1, e, Φ^*, ψ_0, соответствующие переменным $\overline{\lambda}$, r, v_1, c, φ^*, g, где g удовлетворяет при минимизации функционала (7) дифференциальному уравнению (ДУ) $\dot{g} = \alpha_1 + \alpha_2 p^2$ и начальному условию $g(t_0) = 0$, строится функция Гамильтона-Понтрягина H, записывается система уравнений для сопряжённых переменных.

Оптимальное управление $\bar{p}^0$, найденное из условия максимума функции H по переменной $\bar{p}$ с учётом ограничения (1), имеет вид

$$\bar{p}_\eta^0 = p_1^0 \bar{i}_1 + p_2^0 \bar{i}_2 + p_3^0 \bar{i}_3 = p^0 \bar{n}_\eta / |\bar{n}|, \quad \left(p_j^0 \equiv p_j^{opt}, j = \overline{1,3}\right), \tag{8}$$

$$\bar{n}_\eta = s_1 \bar{i}_1 + er\bar{i}_2 + \left[r\nu_1/(2c)\right]\bar{i}_3, \; |\bar{n}| = \left[s_1^2 + r^2\left(e^2 + \nu_1^2/\left(4c^2\right)\right)\right]^{1/2}. \tag{9}$$

При минимизации функционала (7) в случаях

$$\alpha_2 > 0: \; p^0 = \begin{cases} (2\alpha_2)^{-1}|\bar{n}|, & (2\alpha_2)^{-1}|\bar{n}| \le p_{\max}, \\ p_{\max}, & (2\alpha_2)^{-1}|\bar{n}| > p_{\max}; \end{cases} \tag{10}$$

$$\alpha_2 = 0: \; p^0 = p_{\max}.$$

Здесь ν_1 – компонента кватерниона $\bar{\nu} = \nu_0 + \nu_1 \bar{i}_1 + \nu_2 \bar{i}_2 + \nu_3 \bar{i}_3 = \tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{\mu}$.

Таким образом, задача сводится к интегрированию 16-ти ДУ относительно переменных r, v_1, c, φ^*, λ_j, ρ, s_1, e, Φ^*, μ_j, $\left(j = \overline{0,3}\right)$.

В результате анализа задачи в рассмотрение вводится новая кватернионная переменная $\bar{\nu} = \tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{\mu}$, связанная с кватернионным первым интегралом уравнений задачи $\bar{\nu}^* = \bar{\mu} \circ \tilde{\bar{\lambda}} = const$ соотношением $\bar{\nu} = \tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{\nu}^* \circ \bar{\lambda}$.

Учёт первых интегралов краевой задачи оптимизации и использование переменных $\nu_j, \left(j = \overline{1,3}\right)$, являющихся компонентами кватерниона $\bar{\nu}$, позволяет понизить порядок полученной системы ДУ на 6 единиц для любого управления $\bar{p}$, упростить их и привести к виду

$$\dot{v}_1 = c^2/r^3 - fM/r^2 + p_1, \quad \dot{r} = v_1, \quad \dot{c} = rp_2, \tag{11}$$

$$\dot{s}_1 = -\rho, \quad \dot{\rho} = \left[\left(3c^2/r - 2fM\right)s_1 + c\nu_3\right]/r^3 - ep_2 - \dot{\nu}_1 p_3/(2c), \tag{12}$$

$$\dot{e} = -\left(2cs_1/r + \nu_3/2\right)/r^2 + r\nu_1 p_3/\left(2c^2\right), \tag{13}$$

$$\dot{\nu}_1 = c\nu_2/r^2, \quad \dot{\nu}_2 = -c\nu_1/r^2 + r\nu_3 p_3/c, \quad \dot{\nu}_3 = -r\nu_2 p_3/c. \tag{14}$$

Система уравнений (11) – (14) и уравнение для φ^* из (3) образуют систему 10-го порядка относительно переменных $r, v_1, c, \varphi^*, \rho, s_1, e, \nu_j \; \left(j = \overline{1,3}\right)$. При их интегрировании появятся 10 произвольных постоянных, 11-м неизвестным будет время t_k. Для определения 6-ти неизвестных постоянных и времени служат: граничное условие (5), кватернионное условие

$$\bar{\lambda}(t_k) \circ \bar{\nu}(t_k) \circ \tilde{\bar{\lambda}}(t_k) = \bar{\lambda}(t_0) \circ \bar{\nu}(t_0) \circ \tilde{\bar{\lambda}}(t_0), \tag{15}$$

полученное из (6) и кватернионного первого интеграла, условие трансверсальности

$$C_\varphi + p^* e^* \rho(t_k)\sin\varphi_k^* + \left(1+e^*\cos\varphi_k^*\right)^2\left[\frac{e^* c^*}{p^*} s_1(t_k)\cos\varphi_k^* + \frac{1}{2}\nu_3(t_k)\right] = 0, \quad (16)$$

где C_φ – постоянная интегрирования,

и первый интеграл

$$H^0 = -\left(\alpha_1 + \alpha_2 p^{02}\right) + \rho v_1 + s_1\left(\frac{c^2}{r^3} - \frac{fM}{r^2} + p_1^0\right) + erp_2^0 + \frac{r v_1 p_3^0}{2c} + \frac{c\nu_3}{2r^2} + \frac{c^* C_\varphi}{p^{*2}} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, исходная краевая задача оптимального управления орбитальным движением КА, описываемая системой 16-ти нелинейных ДУ, сведена к краевой задаче, описываемой системой 10-ти нелинейных ДУ, правые части которых не только не усложнились, но и упростились.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч.1 // Космические исследования. 2001. Т. 39, № 5. С. 502 – 517.

УДК 301.15.15.07.02

Я. Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ И УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВСТРЕЧЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ*

В статье представлены результаты расчётов для решения пространственной задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина о встрече двух космических аппаратов (КА), один из которых движется по эллиптической орбите только под действием силы притяжения к центру. Для решения задачи используются кватернионные или векторные элементы орбиты, в которых уравнения движения КА являются регулярными и обладают структурой, удобной для численного решения задач оптимального управления с применением ЭВМ. Рассмотрены два варианта функционала, определяющего качество процессов управления.

1. Движение совокупности управляемого и неуправляемого космических аппаратов в безразмерных кватернионных элементах орбит **A** и **B** описывается уравнениями [1, 2]:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -\varepsilon Q\mathbf{F}_1\sin\varphi, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = \varepsilon Q\mathbf{F}_1\cos\varphi, \quad \frac{dt}{d\varphi} = u^2\sqrt{2Q}, \quad Q = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2, \quad \mathbf{q} = P(\mathbf{u})\mathbf{p},$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathrm{u}^2\mathbf{q} + (\mathbf{w},\mathbf{q})\mathbf{w}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{A}\cos\varphi + \mathbf{B}\sin\varphi, \quad \mathbf{w} = -\mathbf{A}\sin\varphi + \mathbf{B}\cos\varphi, \quad (1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00988).