В момент времени 0.001848 с в выходном сечении диффузора скорость движения продуктов детонации становится отрицательной, т. е. воздух начинает поступать через это сечение в двигатель. Расчёт проводился до этого момента времени. Из табл. 2 видно, что давление на дне камеры в этом промежутке времени монотонно уменьшается, давление в среднем сечении диффузора сначала уменьшается, затем его изменение принимает колебательный характер.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сапунков Я.Г., Шиндяпин Г.П., Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Математическая модель детонационного двигателя // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 178 – 181.

2. *Сапунков Я.Г., Шиндяпин Г.П., Поршнев В.А., Федорец В.Н.* Вычислительный эксперимент по определению газодинамических параметров в камере детонационного двигателя // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 213 – 216.

УДК 232.5; 232.135

А. И. Сафрончик, М. И. Сафрончик

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ «ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ» ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Рассматривается неустановившееся течение вязкопластичной среды между параллельными плоскостями, одна из которых остаётся неподвижной, а другая начинает двигаться из состояния покоя с некоторой скоростью.

В отличие от вязкой и обычной Бингамовской жидкостей течение возникает лишь в области, непосредственно примыкающей к движущейся пластине, а остальная часть среды остаётся неподвижной. Область течения растёт, охватывая всё новые слои жидкости, пока не займёт всё пространство между пластинами.

Решение этой задачи связано с определёнными трудностями, так как она относится к классу не вполне корректно поставленных задач (область течения в начальный момент отсутствует и негде задавать начальное условие), а граница области течения изменяется во времени по неизвестному закону.

Для решения используется метод Колоднера [1], по-видимому, единственный из известных на сегодня методов решения подобных задач.

Считая площадь пластин достаточно большой, течение можно рассматривать как плоскопараллельное. Для нахождения единственной отличной от нуля компоненты скорости необходимо решить следующую краевую задачу:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \quad (0 < y < h(t), \quad 0 < t < T), \tag{1}$$

$$V_x(0,t) = U(t), \tag{2}$$

$$\lim_{y \to h(t)-0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\tau_c - \tau_\partial}{\eta}, \tag{3}$$

$$\lim_{y \to h(t)-0} V_x = 0, \tag{4}$$

$$h(0) = 0, \quad h(T) = H. \tag{5}$$

Здесь ρ – плотность, η – структурная вязкость, τ_c и τ_∂ – статическое и динамическое предельные напряжения сдвига, $h(t)$ – нижняя граница зоны течения, T – момент времени, когда вся область между пластинами придёт в движение. Начало декартовой системы координат расположено на движущейся пластине, а оси координат направлены вдоль движущейся пластины и внутрь слоя.

Следуя методу Колоднера, распространим определение решения на область $h(t) < y < \infty$, полагая там $V_x \equiv 0$. Сначала строится вспомогательное решение при дополнительных условиях:

$$V_x(0,t) = \varphi(t), \tag{6}$$

$$V_x(y,0) = V_x(\infty,t) = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{y \to h(t)+0} V_x(y,t) - \lim_{y \to h(t)-0} V_x(y,t) = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{y \to h(t)+0} \frac{\partial V_x}{\partial y} - \lim_{y \to h(t)-0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\tau_c - \tau_\partial}{\eta}. \tag{9}$$

Для единственности решения потребуем, чтобы оно было ограниченным, а $\left|\frac{\partial V_x}{\partial y}\right| \le \frac{C}{\sqrt{t}}$. Решение этой вспомогательной задачи записывается в виде

$$V_x(y,t) = \int_0^t \dot{\varphi}(\xi) erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu(t-\xi)}}\right) d\xi - \frac{\tau_c - \tau_\partial}{2\eta}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(y-h(\xi))^2}{4\nu(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi, \tag{10}$$

$$\varphi(t) = U(t) + \frac{\tau_c - \tau_\partial}{2\eta}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{h(\xi)^2}{4\nu(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi. \tag{11}$$

Здесь $U(t)$ – скорость пластины, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

Потребовав теперь, чтобы

$$\lim_{y \to h(t)+0} V_x(y,t) = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{y \to h(t)+0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0, \tag{13}$$

получим два уравнения для определения неизвестной границы $h(t)$. В работе [2] показано, что если $h(t)$ является решением уравнения (12), то $V_x \equiv 0$ в области $h(t) < y < \infty$ и, следовательно, уравнение (13) выполняется автоматически. Выпишем уравнения (11) и (12) более подробно:

$$\int_0^t \dot{\varphi}(\xi) erfc\left(\frac{h(t)}{2\sqrt{\nu(t-\xi)}}\right) d\xi - \frac{\tau_c - \tau_\partial}{2\eta}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{(h(t)-h(\xi))^2}{4\nu(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi = 0, \tag{14}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\int_0^t \frac{\dot{\varphi}(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{h(t)^2}{4\nu(t-\xi)}} d\xi + \frac{\tau_c - \tau_\partial}{2\eta}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\nu\pi}}\int_0^t \frac{h(t)-h(\xi)}{(t-\xi)^{3/2}} e^{-\frac{(h(t)-h(\xi))^2}{4\nu(t-\xi)}} d\xi\right) = 0. \tag{15}$$

Уравнения (14) и (15) относительно функции $h(t)$ являются сложными интегро-дифференциальными уравнениями. Эффективных методов их решения нет. Для их решения применён метод обратных задач, заключающийся в том, что задаётся закон изменения функции $h(t)$ и ищется функция $U(t)$, соответствующая этому закону. Относительно функции $U(t)$ уравнения (14) и (15) являются линейными интегральными уравнениями Вольтерра. Функция $h(t)$ ищется в виде кусочно-ломаной линии, угловые коэффициенты наклона которой на каждом временном шаге определяются из условия совпадения значения истинной скорости в конце этого шага со значением скорости, найденной при решении обратной задачи.

Для оценки погрешности предлагаемого метода построено точное решение одной обратной задачи. Пусть $h(t) = 2\sigma\sqrt{\nu t}$ (такой закон изменения границы присущ всем известным автомодельным задачам стефановского типа). Уравнения (14) и (15) в этом случае примут вид

$$\int_0^t \dot{U}(\xi) erfc\left(\sigma\sqrt{\frac{t}{t-\xi}}\right) d\xi = \frac{\tau_c - \tau_\partial}{4\eta}(2B - AC)\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\int_0^t \frac{\dot{U}(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{\sigma^2 t}{t-\xi}} d\xi = \frac{\tau_c - \tau_\partial}{2\eta}\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}E - \frac{2AD}{\pi}\right). \tag{17}$$

Здесь A, B, C, D, E обозначают найденные значения интегралов:

$$A = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma^2 x}{1-x}}}{\sqrt{1-x}} dx = 2\left(1 - \sigma e^{\sigma^2}\sqrt{\pi}\, erfc(\sigma)\right),$$

$$B = \int_0^1 \frac{e^{-\sigma^2\frac{(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt{1-x}} dx = 2\left(e^{-\sigma^2} + 2\sigma\sqrt{\pi}\, erf(\sigma) - \sigma^2 \pi e^{\sigma^2} erfc(\sigma) erfc(-\sigma)\right),$$

$$C = e^{-\sigma^2} A, \qquad D = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{1-x}}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx = \pi\, erfc(\sigma),$$

$$E=\int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}} e^{-\sigma^2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx = \pi e^{\sigma^2} erfc(\sigma) erfc(-\sigma) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} erf(\sigma).$$

Единственным решением уравнения (16) является функция $U(t)=M\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}$, где $M=\frac{\tau_c-\tau_\partial}{2\eta}\frac{2B-AC}{C}$, а уравнение (17) выполняется автоматически. Если ввести характерную скорость U_0, то скорость пластины будет представляться формулой

$$U(t)=U_0\sqrt{\frac{\tau_c-\tau_\partial}{\eta}t}. \tag{18}$$

Постоянная σ в законе изменения границы будет решением уравнения

$$\sigma e^{\sigma^2}=\frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\tau_c-\tau_\partial}}. \tag{19}$$

Распределение скоростей в зоне течения задается формулой

$$V_x(y,t)=U_0\sqrt{\frac{\tau_c-\tau_\partial}{\eta}t}\left(e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}-\frac{y}{2\sigma\sqrt{\nu t}}e^{-\sigma^2}+\frac{y\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\nu t}}\left(erfc(\sigma)-erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right)\right). \tag{20}$$

Результаты расчётов по предлагаемому методу будут обсуждаться в наших дальнейших работах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kolodner J.J.* Free boundary problem for the heat equation wich applications of change of phase // Comm. On Pure and Appl.Math. 1956. Vol. IX, № 1.

2. *Сафрончик А.И.* Некоторые задачи неустановившегося течения вязкопластичных сред: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1962. 109 с.

УДК 232.5; 232.135

М. И. Сафрончик

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ “ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ” ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Данная статья посвящена реализации идеи сведения задачи о неустановившемся течении вязкопластичной среды к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, изложенной в работе [1]. В качестве примера рассмотрен переход от одного стационарного режима течения по наклонной плоскости к другому при изменении угла наклона этой плоскости к горизонту.