БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Недорезов П.Ф., Сироткина Н.М.* Численные методы исследования установившихся колебаний вязкоупругих прямоугольных пластинок и круговых цилиндрических оболочек. Саратов, 1997.

2. *Сироткина Н.М.* Исследование НДС консольной вязкоупругой панели при вибрационном изгибе // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2002. С. 123 – 129.

3. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. 16, вып. 3. С. 171 – 174.

4. *Коваленко А.Д., Карнаухов В.Т., Яковлева Г.А.* Нагрев вязкоупругого стержня при его поперечных колебаниях // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1972. Вып. 12. С. 96 – 99.

5. *Сироткина Н.М., Астафьев А.И.* О тепловом поле при вибрационном изгибе вязкоупругой панели // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2001. С. 79 – 86.

УДК 533.6.011:532.529

Г. П. Шиндяпин

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАСЛАВСКОГО-ГРИБА В ТЕОРИИ КОРОТКИХ ВОЛН*

1. При исследовании задач распространения и взаимодействия относительно слабых ударных волн в газах и газожидкостных средах используется асимптотическая система уравнений коротких волн [1] (μ, ν – компоненты скорости, δ, Y – независимые полярные координаты)

$$2(\mu-\delta)\mu_\delta+\nu_Y+\mu=0,\quad \mu_Y=\nu_\delta,\quad \mu=P^{(1)}=H^{(1)} \tag{1}$$

Среди различных классов точных частных решений [2] этой системы выделяется класс решений Заславского-Гриба [3] (q – параметр)

$$\mu=\varphi_2(q)Y^2+\varphi_1(q)Y+\varphi_0(q);\ \delta=qY^2+\chi_1(q)Y+\chi_0(q);$$
$$\nu=\psi_3(q)Y^3+\psi_2(q)Y^2+\psi_1(q)Y+\psi_0(q), \tag{2}$$

позволяющий точно удовлетворить условиям динамической совместности на фронте ударной волны $\delta=\delta^*(\mathrm{Y})$ при $q=q^*=const$ ($\mu_1=1;0;\eta.\ \alpha^\nu,\eta$ – параметры подобия задачи)

$$\left(\frac{d\delta^*}{d\mathrm{Y}}\right)^2=2\delta-\mu-\mu_1,\quad (\mu-\mu_1)\frac{d\delta^*}{d\mathrm{Y}}=\nu-\nu_1,\quad \nu_1=-\mu_1\left(\mathrm{Y}\pm\alpha^\nu\right). \tag{3}$$

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (проект 205.01.01.030, грант № 03-01-00524).

2. Подстановка (2) в (1) приводит [3] к системе 9 дифференциальных уравнений относительно $\varphi_2(q)...\chi_0(q)$, которая после разрешения её относительно производных принимает вид

$$\varphi'_2=\frac{4\varphi_2 q-\varphi_2-3\psi_3}{2f_0},\ \varphi'_1=\frac{2\chi_1\varphi_2+2\varphi_1 q-\varphi_1-2\psi_2}{2f_0},\ \varphi'_0=\frac{\chi_1\varphi_1-\varphi_0-\psi_1}{2f_0},$$

$$\chi'_0=\frac{-2\chi_0+\chi_1^2+2\varphi_0}{2f_0},\ \chi'_1=\frac{-2\chi_1 q-\chi_1+\varphi_1}{2f_0},\ \psi'_3=\frac{2\varphi_2^2-\varphi_2 q+3\psi_3 q}{f_0}, \qquad (4)$$

$$\psi'_2=\frac{-3\chi_1\varphi_2+3\chi_1\psi_3+6\varphi_1\varphi_2+4\psi_2 q}{2f_0},\psi'_0=\frac{-2\chi_0\varphi_1+\chi_1\varphi_0+\chi_1\psi_1+2\varphi_0\varphi_1}{2f_0},$$

$$\psi'_1=\frac{-4\chi_0\varphi_2-\chi_1\varphi_1+2\chi_1\psi_2+4\varphi_0\varphi_2+2\varphi_0 q+2\varphi_1^2+2\psi_1 q}{2f_0},$$

где $f_0=\varphi_2+2q^2-q$.

Исключая $\psi_3(q)$ из 1-го и 6-го уравнений (4), получим уравнение для $\varphi_2(q)$:

$$\varphi''_2\left(\varphi_2+2q^2-q\right)+\varphi'^2_2=(0{,}5+q)\,\varphi'_2-\varphi_2$$

с решением

$$\varphi_2(q)=A\sqrt{|q+B|}-2Bq-4B^2-B;\quad A,B-const. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в основную систему уравнений (4) и исключая неизвестные, получим выражения для $\psi_3(q)$ и для остальных искомых функций через $\chi_1(q)$, $\chi_0(q)$

$$\psi_3=-\frac{2}{3}\cdot\left[f_0\cdot\varphi'_2+\left(\frac{1}{2}-2q\right)\varphi_2\right];\quad \psi_2=-f_0\cdot\varphi'_1+\chi_1\cdot\varphi_2+\left(q-\frac{1}{2}\right)\varphi_1;$$

$$\psi_1=-2f_0\cdot\varphi'_0-\varphi_0+\varphi_1\cdot\chi_1;\quad \varphi_1=f_0\cdot\chi'_1+\chi_1-2q\chi_1; \qquad (6)$$

$$\varphi_0=f_0\cdot\chi'_0+\chi_0-\frac{1}{2}\chi_1^2;\quad \psi'_0=\frac{1}{2f_0}\left(2\varphi_0\,\varphi_1+\chi_1\,\psi_1+\chi_1\,\varphi_0-2\chi_0\,\varphi_1\right).$$

Подставляя найденные функции (6) и их производные в (4) (уравнения для ψ'_2, ψ'_0), получим 2 уравнения для функций $\chi_1(q)$, $\chi_0(q)$:

$$2f_0^3\cdot\chi'''_1-f_0^2(10q-3-2f'_0)\cdot\chi''_1-f_0\{(6q-1-2f_0)f'_0-2f'^2_0+$$
$$+[10-6q(2q-1)]f_0-4\varphi_2-(2q-1)^2\}\cdot\chi'_1+[3\psi_3+3\varphi_2-8q\varphi_2- \qquad (7)$$
$$-2f_0\varphi'_2-4f_0\,f'_0+3f_0(2q-1)+2(2q-1)q-4(2q-1)q^2+8q\,f_0]\cdot\chi_1=0,$$
$$4f_0^3\cdot\chi'''_0+2f_0^2(6f'_0+3-2q)\chi''_0+2f_0[2f_0\,f''_0+2f'^2_0+3f'_0+2\varphi_2-2q\,f'_0-$$
$$-2q+1]\cdot\chi'_0-8f_0^2\chi_1\chi''_1-\left(6f_0^2+8q+4f_0\right)\cdot\dot\chi_1^2-2f_0(3f'_0+3-4q)\cdot\chi_1\dot\chi_1+$$
$$+\left(2f_0^2+4f_0\right)\cdot\chi_1^2=0.$$

Таким образом, решая сначала линейное однородное уравнение (7) для χ_1, затем линейное неоднородное уравнение для χ_0, находим согласно

(6) выражения для φ_0, φ_1, ψ_1, ψ_2 и ψ_0, интегрируя последнее уравнение (6).

3. При симметричных взаимодействиях ($\eta = 1$), когда картина течений симметрична ($\chi_1(q) = \varphi_1(q) = \psi_2(q) = \psi_0(q) = 0$), задача сводится к интегрированию одного уравнения для $\chi_0(q)$

$$2f_0^2 \cdot \chi_0''' + f_0^2(6f_0' + 3 - 2q)\chi_0'' + [2f_0 f_0'' + 2f_0'^2 + \\ + (3 - 2q)f_0' + 2\varphi_2 - 2q + 1] \cdot \chi_0' = 0. \qquad (8)$$

Переходим к новой переменной $q = -B + S\,p^2$, $S = sign(q + B)$, устраняющей особенность решения (8) при $q = -B$, ($f_0 = 0$).

$$f_0(p) = p\left[2p^3 - S(6B + 1)p - S \cdot A\right].$$

Запишем (8) в виде

$$\left[2p^3 - S(6B+1)p - S\,A\right]^2 \cdot \chi_0''' + 16\left[2p^3 - S \cdot (6B+1)p - S\,A\right] \cdot \left[p^2 - S\,B\right] \cdot \chi_0'' + \\ + 8\left[6p^4 - S(16B+1)p^2 - S\,2Ap + 2B^2 - B\right]\chi_0' = 0. \qquad (9)$$

4. Построим решение (11) для $\chi_0(p)$, используя метод малого параметра. В задачах симметричного нерегулярного взаимодействия 2-х ударных волн, нерегулярного отражения ударных волн [1] таким параметром в общем случае невырожденных взаимодействий (режим C, $0{,}5 \le \alpha^{\nu} \le 2{,}0$) является величина $\varepsilon = -1/A$, ($\varepsilon << 1$; $\varepsilon \to 0$ при $\alpha^{\nu} \to 2{,}0$). Коэффициенты A, B решения (5) выражаются через начальные значения параметра $q = q_0$, ($p = p_0$) на фронте волны Маха:

$$A = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad B = \frac{-1 - \left(20p_0^3 + 2p_0\right)\varepsilon}{16p_0\varepsilon}. \qquad (10)$$

При подстановке (10) в (9) получим базисные уравнения для построения приближений:

$$\begin{aligned}
&(a_{30} + a_{31}\varepsilon)^2 \cdot \chi_0''' + (4a_{30} + 4a_{31}\varepsilon) \cdot (b_{20} + b_{21}\varepsilon) \cdot \chi_0'' + \left(c_{10} + c_{11}\varepsilon + c_{12}\varepsilon^2\right) \cdot \chi_0' = 0;\\
&a_{30} = S(4p_0 + 1{,}5p)\ ;\ a_{31} = Sp_0\left(30p_0^2 - 1\right)p + 8p_0p^3\ ;\\
&b_{20} = S\ ;\ b_{21} = S\left(20p_0^3 + 2p_0\right) + 16\,p_0p^2\ ; \qquad (11)\\
&c_{10} = 1\ ;\ c_{11} = 2\left(20p_0^3 + 2p_0\right) + S\,256\,p_0^2p + 8p_0\left(S\,16p^2 + 1\right);\\
&c_{12} = \left(20p_0^3 + 2p_0\right)^2 + \left(6p^4 - S\,p^2\right)128\,p_0^2 + 16\left(S\,16\,p_0p^2\right) \cdot \left(10p_0^3 + p_0\right).
\end{aligned}$$

Представляя решение (11) в виде

$$\chi_0(p) = \chi_{00}(p) + \chi_{01}(p)\varepsilon + \chi_{02}(p)\varepsilon^2 + \ldots \qquad (12)$$

и подставляя (12) в (11), получим, сокращая члены при одинаковых степенях ε, систему уравнений для нахождения функций $\chi_{0n}(p)$

$$
\begin{aligned}
&9\left(p+8p_0/3\right)^2\chi_{0n}''' + 24\left(p+8p_0/3\right)\chi_{0n}'' + 4\chi_{0n}' = -4f_n(p),\\
&n=0,\quad f_0(p)=0;\\
&n=1,\quad f_1(p)=2a_{30}a_{31}\chi_{00}''' + \left(4a_{31}b_{20}+4a_{30}b_{21}\right)\cdot\chi_{00}'' + c_{11}\chi_{00}';\\
&n\ge 2,\quad f_n(p)=a_{31}^2\chi_{0n-2}''' + 4a_{31}b_{21}\chi_{0n-2}'' + c_{12}\chi_{0n-2}' + 2a_{30}a_{31}\chi_{0n-1}''' +\\
&+\left(4a_{31}b_{20}+4a_{30}b_{21}\right)\cdot\chi_{0n-1}'' + c_{11}\chi_{0n-1}'.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Уравнение для первого члена разложения $\chi_{00}(p)$ сводится к уравнению Эйлера

$$
9x^2\chi_{00}''' + 24x\chi_{00}'' + 4\chi_{00}' = 0,\quad p+\frac{8}{3}p_0 = x, \tag{14}
$$

и имеет решение

$$
\chi_{00}(p) = sc_{01}\frac{3}{2}|x|^{2/3} + sc_{02}\left(-\frac{1}{3}\right)|x|^{-1/3} + c_{03}, \tag{15}
$$

$s = sign\, x$, $c_{01}, c_{02}, c_{03} - const$.

Общее решение уравнения (11) можно представить в виде суммы решений для однородных уравнений (13) $\chi_{0n}^0(p)$ и частных решений для неоднородных уравнений (13) $\overline{\chi}_{0n}(p)$

$$
\begin{aligned}
&\chi_0(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\chi_{0n}^0(p)\cdot\varepsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty}\overline{\chi}_{0n}^0(p)\cdot\varepsilon^n,\\
&\chi_{0n}^0(p) = sc_{n1}\frac{3}{2}|x|^{2/3} + sc_{n2}\left(-\frac{1}{3}\right)|x|^{-1/3} + c_{n3},\\
&\overline{\chi}_{0n}(p) = \frac{a_{1n}}{x^{m/3}} + \frac{a_{2n}}{x^{m/3-1}} + \ldots + a_{kn}x^{k-\frac{m}{3}-1}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Здесь $\overline{\chi}_{0n}(p)$ – отрезок степенного ряда (k, m – целые положительные числа), коэффициенты которого находятся при подстановке (16) в (13) при сравнении коэффициентов в левой и правой частях при одинаковых степенях x. Коэффициенты c_{n1}, c_{n2}, c_{n3} находятся при удовлетворении начальных условий при $p = p_0$, $(x = 11p_0/3)$ для $\chi_0(p_0)$, $\chi_0'(p_0)$, $\chi_0''(p_0)$, получаемых при подстановке (2) в условия на фронте ударной волны (3).

5. В приложениях при использовании решения (16) для анализа задачи нерегулярного симметричного взаимодействия, нерегулярного отражения ударной волны в окрестности фронта Маха ($p = p_0$, $\mu_1 = 0$) начальные данные $\chi_0(p_0) = \chi_0$, $\chi_0'(p_0) = \overline{c}_{12}\cdot\varepsilon^2 + \overline{c}_{13}\cdot\varepsilon^3 + \ldots$, $\chi''(p_0) = \overline{c}_{22}\cdot\varepsilon^2 + \overline{c}_{23}\cdot\varepsilon^3 + \ldots$ содержат коэффициент $\overline{c}_{ij}$, явно выражающийся через p_0, χ_0. Решение для $\chi_0(p)$ (до степеней ε^2) имеет вид $\left(x = p + \frac{8}{3}p_0,\ f_1(p) = f_2(p) = 0,\ \chi_{01}(p) = 0,\ \chi_{00}(p) = \chi_0(p_0) = \chi_0\right)$

$$\chi_0(p) = \chi_0(p_0) + \left(\frac{3}{2}c_{21}|x|^{2/3} - \frac{1}{3}c_{22}|x|^{-1/3} + c_{23}\right)\cdot\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$c_{21} = \frac{4}{3}x_0^{1/3}\overline{c}_{12} + x_0^{4/3}\overline{c}_{22},$$

$$c_{22} = -\frac{1}{3}x_0^{4/3}\overline{c}_{12} - x_0^{7/3}\overline{c}_{22}, \qquad \overline{c}_{12} = 256p_0^3\chi_0, \quad \overline{c}_{22} = 256p_0^2\chi_0. \tag{17}$$

$$c_{23} = -3x_0\overline{c}_{12} - \frac{9}{2}x_0^2\overline{c}_{22},$$

Остальные функции $\varphi_0(q)$, $\varphi_1(q)$, $\psi_1(q)$, $\psi_2(q)$ решения (2) вычисляются согласно (5), (6) через $\chi_0(q)$ в явном виде.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шиндяпин Г.П.* Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. *Клейнер Б.Г., Шиндяпин Г.П.* Об одном классе точных частных решений уравнений коротких волн // ПММ. 1970. Т. 34, вып. 6, С. 1150 – 1158.
3. *Заславский Б.И.* Некоторые частные решения уравнений коротких волн // ПМТФ. 1962. №1. С. 63 – 69.

УДК 533.6.011:532.529

Р. М. Шульдяков, Г. П. Шиндяпин

АНАЛИЗ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЙ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН

1. Рассматривается задача нерегулярного отражения ударной волны относительно слабой интенсивности ($p_{10} << 1$) от жёсткой непроницаемой стенки, наклонённой под углом α к набегающему потоку (рис. 1), которая является одной из актуальных и сложных проблем современной газовой динамики. Используется оригинальная схема течения, допускающая как классическое условие (равенство углов поворота выше и ниже тройных точек), так и неклассическое, когда отбрасывается это условие и в потоке за тройными точками постулируется разрыв в поперечной составляющей скорости.

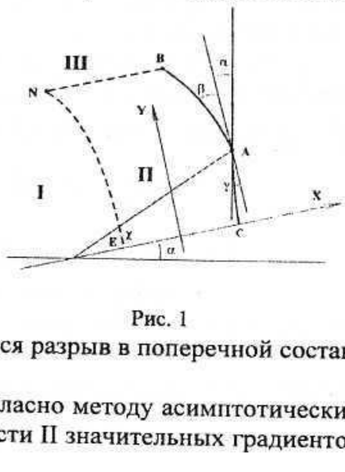

Рис. 1

Анализ общей постановки задачи согласно методу асимптотических разложений [1] основан на выделении области II значительных градиентов