

$$\chi_0(p) = \chi_0(p_0) + \left(\frac{3}{2} c_{21} |x|^{2/3} - \frac{1}{3} c_{22} |x|^{-1/3} + c_{23} \right) \cdot \varepsilon^2 + \dots,$$

$$c_{21} = \frac{4}{3} x_0^{1/3} \bar{c}_{12} + x_0^{4/3} \bar{c}_{22},$$

$$c_{22} = -\frac{1}{3} x_0^{4/3} \bar{c}_{12} - x_0^{7/3} \bar{c}_{22}, \quad \bar{c}_{12} = 256 p_0^3 \chi_0,$$

$$c_{23} = -3 x_0 \bar{c}_{12} - \frac{9}{2} x_0^2 \bar{c}_{22}, \quad \bar{c}_{22} = 256 p_0^2 \chi_0. \quad (17)$$

Остальные функции $\varphi_0(q)$, $\varphi_1(q)$, $\psi_1(q)$, $\psi_2(q)$ решения (2) вычисляются согласно (5), (6) через $\chi_0(q)$ в явном виде.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г.П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1997. 104 с.
2. Клейнер Б.Г., Шиндяпин Г.П. Об одном классе точных частных решений уравнений коротких волн // ПММ. 1970. Т. 34, вып. 6, С. 1150 – 1158.
3. Заславский Б.И. Некоторые частные решения уравнений коротких волн // ПМТФ. 1962. №1. С. 63 – 69.

УДК 533.6.011:532.529

Р. М. Шульдяков, Г. П. Шиндяпин

АНАЛИЗ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЙ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН

1. Рассматривается задача нерегулярного отражения ударной волны относительно слабой интенсивности ($p_{10} \ll 1$) от жесткой непроницаемой стенки, наклоненной под углом α к набегающему потоку (рис. 1), которая является одной из актуальных и сложных проблем современной газовой динамики. Используется оригинальная схема течения, допускающая как классическое условие (равенство углов поворота выше и ниже тройных точек), так и неклассическое, когда отбрасывается это условие и в потоке за тройными точками постулируется разрыв в поперечной составляющей скорости.

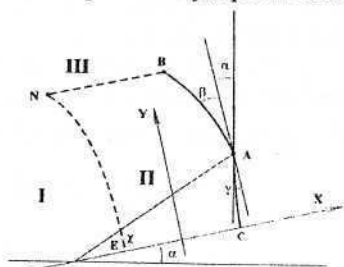


Рис. 1

Анализ общей постановки задачи согласно методу асимптотических разложений [1] основан на выделении области II значительных градиентов

параметров – области коротких волн в окрестности точки взаимодействия ударных волн, области I – линейного решения, области III – квазиодномерного решения.

Постановка задачи отражения УВ сводится к построению во внутренних переменных X, Y (δ, Y) области II решения краевой задачи для компонент скорости μ, v системы уравнений коротких волн

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_Y = \mu = 0, \quad \mu_Y = v_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)}, \quad (1)$$

которое удовлетворяет на границах области коротких волн условиям:

- на линии слабого разрыва условиям непрерывности потока;
- на фронтах УВ $\delta = \delta^*(Y)$ условиям динамической совместности

$$\left(\frac{d\delta}{dY}\right)^2 = 2\delta - (\mu + \mu_1), \quad (\mu - \mu_1)\frac{d\delta}{dY} + (v - v_1) = 0, \quad \mu = P^{*(1)}; \quad (2)$$

$$\frac{d\delta}{dY} = \frac{dX}{dY} + Y, \quad \Psi^v = \frac{dX}{dY}, \quad \alpha^v = \frac{\text{tg}\alpha}{R_0^{1/2}(Y)P_{10}^{1/2}}; \quad (3)$$

– асимптотическим условиям сращивания на границе с областью линейного решения и с областью квазиодномерного решения [1], здесь α^v параметр подобия задачи.

Решение задачи осложняется нелинейностью системы уравнений коротких волн, неизвестным положением фронта Маха и фронта отражённой волны.

В общем случае постулируется сохранение продольной и разрыв поперечной составляющей скорости в точке взаимодействия

$$\mu_1^+ = \mu_1^- = \mu, \quad v_1^+ \neq v_1^-.$$

2. Для построения полей давлений и скоростей используется класс точных частных решений системы уравнений коротких волн, предложенный Б. И. Заславским [2].

Эти решения удовлетворяют точно условиям динамической совместности на фронтах УВ при $q = q^* = \text{const}$ ($q^* = q_0$ на фронте Маха, $q^* = q_1$ на фронте отражённой волны) и имеют вид

$$\begin{aligned} \mu &= \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q), \quad \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q), \\ v &= \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q). \end{aligned} \quad (4)$$

Они позволяют учесть влияние потока в целом на образующиеся ударно-волновые структуры. Подставляя это решение в систему уравнений коротких волн, получим систему девяти уравнений для определения параметров представления решения ($f_0(q) = \varphi_2(q) + 2q^2 - q$):

$$\begin{aligned}
 \varphi_2' &= \frac{4q\varphi_2 - \varphi_2 - 3\psi_3}{2f_0}; & \varphi_1' &= \frac{2\chi_1\varphi_2 + 2q\varphi_1 - \varphi_1 - 2\psi_2}{2f_0}; & \varphi_0' &= \frac{\chi_1\varphi_1 - \varphi_0 - \psi_1}{2f_0}; \\
 \chi_1' &= \frac{4q\chi_1 - 2\chi_1 + 2\varphi_1}{2f_0}; & \chi_0' &= \frac{-2\chi_0 + \chi_1^2 + 2\varphi_0}{2f_0}; & \psi_3' &= \frac{4\varphi_2^2 - 2q\varphi_2 + 6q\psi_3}{2f_0}; \\
 \psi_2' &= \frac{3\psi_3\chi_1 - 3\chi_1\varphi_2 + 6\varphi_1\varphi_2 + 4q\psi_2}{2f_0}; & \psi_0' &= \frac{-2\chi_0\varphi_1 + \chi_1\varphi_0 + \chi_1\psi_2 + 2\varphi_0\varphi_1}{2f_0}; \\
 \psi_1' &= \frac{-4\chi_0\varphi_2 - \chi_1\varphi_1 + 2\chi_1\varphi_2 + 4\varphi_0\varphi_2 + 2q\varphi_0 + 2\varphi_1^2 + 2q\psi_1}{2f_0}
 \end{aligned} \tag{5}$$

и систему начальных условий на фронтах ($q_k = 0$ на AC, $q_k = 1$ на AB):

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(q^*) &= 2q^*(1 - 2q^*), & \varphi_1(q^*) &= 2(1 - 2q^*)\chi_1(q^*), & \varphi_0(q^*) &= 2\chi_0(q^*) - \chi_1^2(q^*), \\
 \psi_3(q^*) &= -4q^*(1 - 2q^*), & \psi_2(q^*) &= -3\varphi_2(q^*)\chi_1(q^*), \\
 \psi_1(q^*) &= 2(3q^* - 1)\chi_1^2(q^*) - 4q^*\chi_0(q^*), & \psi_0(q^*) &= \chi_1^3(q^*) - \chi_1(q^*)\chi_0(q^*), \\
 \chi_1(q^*) &= -2q^*Y_A - \sqrt{2\delta_A - \mu_A - q_k}, & \chi_0(q^*) &= \delta_A - q^*Y_A^2 - \chi_1(q^*)Y_A.
 \end{aligned}$$

Для фронта Маха в силу симметрии течения

$$\varphi_1(q) = \chi_1(q) = \psi_2(q) = \psi_0(q) = 0, \quad \chi_0(q_0) = \delta_A + q_0Y_A^2 - CY_A.$$

Значения $q^* = q_0$ на фронте Маха и $q^* = 1/6$ на фронте отражённой волны находятся из анализа постановки краевой задачи [3].

Анализ системы дифференциальных уравнений (5) показывает [3], что при $q = -B$ система имеет особенность $f_0(q) = 0$, которая устраняется введением новой переменной

$$p = -s\sqrt{|q+B|}, \quad q = sp^2 - B, \quad s = \text{sign}(q+B). \tag{7}$$

Последнее замечание касается только фронта Маха. При расчёте полей давлений и скоростей за фронтом отражённой волны используется исходная система (5).

Для построения полей давлений использовалась программа, реализующая метод Рунге-Кутты IV порядка точности.

На рис. 2 приведены полученные поля давлений $P(X, Y) = \mu(X, Y)$ и скоростей $v(X, Y)$.

Сравнение полученных результатов для полей давлений и скоростей с результатами численного решения [3] и экспериментальными данными [2], показывает их достаточно хорошее соответствие как в вырожденном случае (рис 2, a, b), так и в невырожденном (рис 2, c, d).

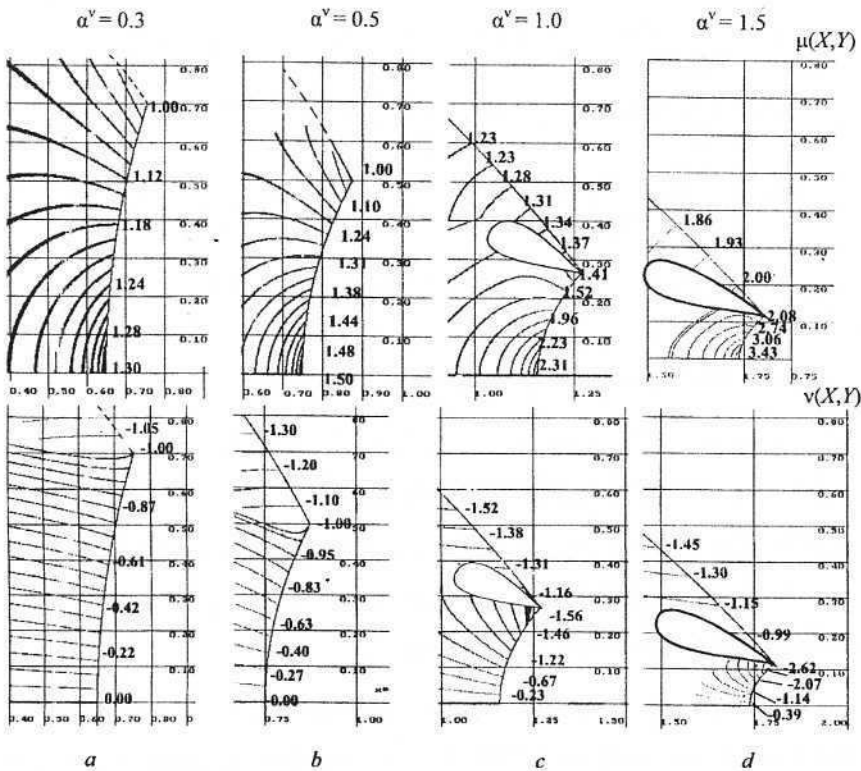


Рис. 2

Области перекрытия (рис. 2, *c*, *d*) решений вблизи фронта Маха и фронта отражённой волны требуют дополнительного анализа с помощью локального разложения в окрестности точки взаимодействия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г.П. Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. Сер. Механика жидкостей и газа. 1996. № 2. С. 183 – 190.
2. Заславский Б.И., Сафаров Р.А. О маховском отражении слабых ударных волн от жёсткой стенки // ПМТФ. 1973. № 5. С. 26 – 33.
3. Шиндяпин Г.П. Численное решение задачи нерегулярного отражения слабой ударной волны от жёсткой стенки в идеальном газе // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20, №1. С. 249 – 254.