$$\Delta = 1/\left[\left(80s^2 - 20\gamma u_{02} - 20u_{02}\right)t^2 - 20\gamma u_{00} - 20u_{00}\right].$$

Таким образом, решив систему (4) и подставив в (3) для получения нулевого приближения, можно найти первую поправку (u_1, v_1), а также (u_2, v_2), которая имеет весьма громоздкий вид. Поправки описываются рациональными функциями параметра t, тогда как нулевое приближение – полиномиальное.

Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Брежнев А.Л., Чернов И.А.* О трансзвуковых разложениях // ПММ. 1987. Т. 51. С. 708-710.

УДК 624.131+539.215

А.Г. Маркушин

ОБ ОСНОВНЫХ ДЕТАЛЯХ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ИСТЕЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА С ТВЕРДЫМ ЗЕРНОМ

При решении инженерных задач, связанных с конструированием бункерного оборудования для хранения и переработки сыпучих материалов, необходимо иметь математическую модель движения сыпучих сред, которая позволяла бы делать количественные оценки их поведения и функционирования конструктивных элементов этого оборудования в процессе его эксплуатации. Последнее невозможно без создания теории движения сыпучей среды, адекватно описывающей ее главные свойства, проявляющиеся при истечении из бункерных устройств. К числу таких свойств сыпучего тела относится, прежде всего, свойство образования запирающих динамических сводов, полностью прекращающих истечение или ответственных за явление пульсации при истечении [1].

Сыпучее тело, отдельные зерна которого не испытывают пластических деформаций ни при каких обстоятельствах его переработки, будем называть твердозёренным сыпучим материалом или сыпучим телом с твердым зерном. Понятно, что предел текучести отдельных зерен подобного сыпучего тела должен быть во много раз (в десятки раз) большим предела пропорциональности самого сыпучего материала. К таким материалам относятся все каменные и рудные породы мелкой фракции, пески, металлическая и стеклянная крошка и т.д.

Построение указанной теории начато в работах [2, 3]. Приведем здесь основные детали построения, опираясь на теорию пластического течения сплошной среды при переменных нагружениях [4-6], в силу того, что именно она положена в основу развиваемой в [2, 3, 7-13, 14] теории. Составными элементами этой теории являются соотношения и уравнения равновесия теории упругости, условие пластичности, условие упрочнения при сжатии, законы пластического течения и сохранения массы элемента сыпучего тела. Под элементом сыпучего материала понимается достаточно большая совокупность отдельных его зерен.

Центральным звеном предлагаемой теории движения сыпучей среды является диаграмма учета истории нагружения элемента сыпучего материала и алгоритм ее реализующий [3, 8]. Главная из гипотез (N 1), лежащих в основе теории пластического течения, несколько меняется: предполагается пропорциональность компонент тензора приращений пластических деформаций компонентам тензора напряжений. Кроме того, вводится гипотеза N 3 о динамическом уплотнении сыпучего материала для элементов, пришедших в движение и затем замедливших его по причине ограниченности расхода материала при истечении через отверстие. Для элементов, покинувших бункер и достаточно от него удалившихся, вводится гипотеза N 4 о свободном их падении.

Интенсивности напряжений σ_i, деформаций ε_i, приращений пластических деформаций $\Delta\varepsilon_i{}^p$ функционально определяются как $I = (I_1^2 - 2I_2)^{0.5}$, где I_j — инварианты соответствующего тензора. Причем величина I может быть интерпретирована для напряжений в главных осях как модуль вектора полного напряжения.

Численное решение задач проводится поэтапно применением метода переменных параметров упругости [4-6], дискретизация краевых задач осуществляется методом конечных разностей, решение систем алгебраических уравнений проводится итерационными методами [14].

Закон пластического течения в осесимметричном случае может быть представлен с учетом гипотезы N 1, подобно тому, как это сделано в [4, 5], в следующем виде:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r &= [d\sigma_{rr} - \mu(d\sigma_{\phi\phi} + d\sigma_{zz})]/E + F(\sigma_i)\sigma_{rr}d\sigma_i, \\ d\varepsilon_\phi &= [d\sigma_{\phi\phi} - \mu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{rr})]/E + F(\sigma_i)\sigma_{\phi\phi}d\sigma_i, \\ d\varepsilon_z &= [d\sigma_{zz} - \mu(d\sigma_{rr} + d\sigma_{\phi\phi})]/E + F(\sigma_i)\sigma_{zz}d\sigma_i, \\ d\gamma_{zr} &= 1/Gd\sigma_{zr} + F(\sigma_i)\sigma_{zr}d\sigma_i, \end{aligned} \tag{9}$$

где функция $F(\sigma_i)$ предполагается одной и той же для любого напряженно-деформированного состояния и может быть определена по кривой деформирования при сжатии сыпучего материала в цилиндре с идеально гладкими поверхностями, диаметр которого, по крайней мере, на порядок больше, чем средний размер зерен материала. При этом предполагается, что начальный линейный участок диаграммы сжатия может быть продолжен в область малых деформаций растяжения.

При сжатии сыпучего тела в цилиндре, ось которого совпадает с осью

z, при весьма ограниченном ходе поршня, можно считать, исходя из кинематических соображений, что отличным от нуля будет только одно деформационное перемещение w (вдоль оси z) и, исходя из характера силового воздействия, можно предположить, что касательные напряжения будут равны нулю. Поэтому $d\varepsilon_r = d\varepsilon_\phi = d\gamma_{zr} = d\sigma_{zr} = \sigma_{zr} = 0$, и тогда из соотношений (1) нетрудно получить

$$F(\sigma_i) = (1-\mu)/((1+\mu)\sigma_i)(1/E_k - (1-2\mu^2/(1-\mu))/E),\ E_k = \partial\sigma_i(\varepsilon_i)/\partial\varepsilon_i,$$

в предположении, что $\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{zz} = \sigma_0 \equiv \sigma_i$. Здесь E_k — касательный модуль для кривой деформирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Богомягких В.А.* Теория и расчет бункеров для зернистых материалов. Ростов/НД: Изд-во Рост. ун-та, 1973.

2. *Маркушин А.Г.* К построению модели истечения сыпучего материала // Математика, механика и их приложения: Материалы науч.-практ. конф., Саратов, октябрь 1997. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998. с. 58.

3. *Маркушин А.Г.* Об алгоритме учета истории нагружения в задаче истечения сыпучего материала // Математика, механика и их приложения: Материалы науч.-практ. конф., Саратов, октябрь 1997. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998. с. 56.

4. *Биргер И.А.* Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. Сер. механика и машиностроение, 1964, №1. С. 193.

5. *Биргер И.А.* Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Сер. механика. 1965, №2. С. 113.

6. *Шевченко Ю.Н.* Термопластичность при переменных нагружениях. Киев: Наук. думка. 1970.

7. *Горюшинский И.В., Горюшинский В.С., Маркушин А.Г., Третьяков Г.М.* К разработке теоретической основы проектирования осесимметричных бункеров для хранения сыпучих материалов // Механизация и автоматизация технологических процессов на транспорте и в агропромышленном комплексе. Самара: Самарский институт инженеров железнодорожного транспорта, ОАО «САМНИТ». 1998. Вып.16. С. 45-48.

8. *Горюшинский И.В., Горюшинский В.С., Маркушин А.Г., Третьяков Г.М.* К разработке теоретической основы исследования движения сыпучего материала в бункерах и бункерных устройствах // Механизация и автоматизация технологических процессов на транспорте и в агропромышленном комплексе. Самара: Самарский институт инженеров железнодорожного транспорта, ОАО «САМНИТ». 1998. Вып.16. С. 48-52.

9. *Контарев А.А., Маркушин А.Г., Садовничая Е.В.* Алгоритм решения задачи истечения сыпучего материала // Математика, механика, математическая кибернетика. Саратов: Изд. Сарат. ун-та, 1999. С. 88-93.

10. *Маркушин А.Г.* К построению модели истечения сыпучего материала с твердым зерном // Материалы межвузовской научной конференции «Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами»: март 2000, Саратов. 2000. С. 74-82.

11. *Контарев А.А., Королева О.А., Маркушин А.Г.* Об уравнениях движения сыпучего тела и их решении средствами теории пластичности при переменных нагружениях// Материалы межвузовской научной конференции «Современные проблемы нелинейной

механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами»: март 2000, Саратов. 2000. С. 82-89.

12. *Контарев А,А., Маркушин А.Г., Садовничая Е.В.* Метод дополнительных деформаций в решении задачи истечения сыпучего тела // Материалы межвузовской научной конференции «Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами»: март 2000, Саратов. 2000. С. 89-102.

13. *Маркушин А.Г.* К разработке динамической теории сыпучего тела с твердым зерном // Аэродинамика. Вып. 15 (18). Саратов: Изд. Сарат. ун-та. 2001. С. 96.

14. *Маркушин А.Г.* Квазистатический подход в решении задачи истечения сыпучего тела с твердым зерном // Межвуз. научн. сб. «Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред». Саратов: Изд. СГТУ, 2004. С. 136

УДК 531.381
531.395

В.Ю. Ольшанский, Д.С. Степаненко

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАДРАТИЧНОГО ИНТЕГРАЛА И ПРИВОДИМОСТЬ ИЗМЕНЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Рассматривается движение механической системы постоянного состава и изменяемой конфигурации в центральном поле. Если размеры системы значительно меньше расстояния до центра поля, то для описания движения можно использовать систему [1]

$$y^\bullet = y \times x + p g_3 \times J g_3, \ g_i^\bullet = g_i \times (x - \Omega), \ i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Здесь $J(t)$ — оператор инерции системы в ее центре масс, $()^\bullet$ — производная по времени в главной системе отсчета, $y = Jx + K$, x — угловая скорость главной системы отсчета, $K(t)$ — кинетический момент движения относительно главной системы отсчета, g_1, g_2, g_3, Ω — орты и угловая скорость орбитальной системы отсчета, $\Omega = k_2 g_2 + k_3 g_3$, $p = p(r)$.

При изучении движения системы изменяемой конфигурации и состава без динамической симметрии в центральном поле получены [1] необходимые и достаточные условия существования квадратичного интеграла. Показано, в частности, что для существования интеграла необходимо, чтобы траектория центра масс находилась на поверхности некоторого фиксированного в инерциальном пространстве кругового конуса с вершиной в центре силового поля.

Для случая динамической симметрии $A_1 = A_2 \neq A_3$ (A_i — собственные значения оператора J) доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для существования квадратичного интеграла необходимо, чтобы траектория центра масс находилась на поверхности кругового конуса с вершиной в центре поля. В случае, когда траектория не совпадает*