4. *Аккуратов Ю.Н., Михайлов В.Н.* Решение нелинейных стационарных задач теплопроводности с граничными условиями I - IV рода // ЖВММФ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1819 - 1826.

УДК 517.983/.983.8

Е. Л. Александров

О МЕТОДЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Существенным моментом классического метода Фурье разделения переменных при решении некоторых краевых задач математической физики является то, что операции дифференцирования, фигурирующие в этих задачах, рассматриваемые в соответствующих гильбертовых пространствах, являются регулярными симметричными операторами с конечными дефектными числами. Поэтому один из них можно расширить до самосопряженного с дискретным спектром $\{ \lambda_\kappa \}$ и полной системой собственных функций $\{\varphi_\kappa(x)\}$, а для сопряженного второго из операторов любая точка комплексной плоскости будет его собственным значением, в частности, собственными значениями будут все λ_κ, соответствующие собственные функции $\psi_k(t)$ принадлежат дефектным подпространствам этого оператора. Используя этот факт, мы применяем метод Фурье для нахождения решений u операторных уравнений $B_t{}^*u = A_x u + f$, с краевыми условиями, налагаемыми на u, где операторы B_t и A_x являются симметрическими (один из них регулярный) с равными дефектными числами и действуют, соответственно, в гильбертовых пространствах $L^2(G_t)$ и $L^2(G_x)$, G_t и G_x – области из $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{R}^m$.

2. Пусть B – симметричный оператор с индексами дефекта (1.1), $\overset{\circ}{B}$ - его самосопряженное расширение, $\varphi_\lambda \in \aleph_\lambda$ - элемент дефектного подпространства $\aleph_\lambda$ оператора B. Всякая аналитическая в верхней полуплоскости $\boldsymbol{C}^+$ функция $\theta(\lambda)$, не превосходящая по модулю единицы, $|\theta(\lambda)| \le 1$, $\lambda \in \boldsymbol{C}^+$ определяет квазисамосопряженное (диссипативное) расширение B_θ : $B_\theta f = B^* f$, $f \in D(B_\theta) = D(B) + c\,[\theta(\lambda)\varphi_{-i} - \varphi_i]$, $c \in \boldsymbol{C}$, резольвента которого (обобщенная резольвента оператора B) задается формулой [1]

$$R_\lambda(B^\vartheta)f = R_\lambda(\overset{\circ}{B})f + \frac{1-\theta(\lambda)}{\theta(\lambda)\chi(\lambda)-1}\cdot\frac{(f,\varphi_{\bar{\lambda}})}{(\lambda+i)(\varphi_\lambda,\varphi_i)}\varphi_\lambda,\ \ \lambda \in \mathbf{C}^+, \tag{1}$$

где $\chi(\lambda) = \dfrac{\lambda - i}{\lambda + i}\cdot\dfrac{(\varphi_\lambda,\varphi_{-i})}{(\varphi_\lambda,\varphi_i)}$.

Отметим, что если λ - точка регулярного типа оператора B, то она является собственным значением оператора B^*, соответствующей собственной функцией будет элемент φ_λ дефектного подпространства $\aleph_{\bar{\lambda}}$: $B^*\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$.

3. Однородная задача. В пространстве $L^2(0,1)$ рассмотрим оператор A_x, полагая для любой $f \in L^2(0,1)$

$$A_x f(x) = \pi i \int_0^1 |x-y| f(y)dy.$$

Оператор A_x является оператором Гильберта-Шмидта, он имеет полную систему собственных функций $\varphi_\kappa(x) = \mathrm{Cos}(2k\text{-}1)\pi x$, соответствующих собственным значениям $\lambda_\kappa = 2\pi^{-1}i(2k\text{-}1)^{-2}$. В пространстве $L^2(R)$ определим оператор дифференцирования B_t, равенством $B_t f = \dfrac{1}{2\pi i} f'$, заданный на множестве функций $f \in L^2(R)$ абсолютно непрерывных на R таких, что $f' \in L^2(R)$ и $f(a) = 0$, где $a < 0$ – произвольное отрицательное число. Оператор B_t будет иметь индексы дефекта (1.1), элемент дефектного подпространства B_t есть функция [2]

$$\Psi_\lambda(t) = 1_{\varepsilon(\lambda)}(t-a)e^{2\pi i\lambda(t-a)}, \quad \mathrm{Im}\lambda \neq 0,$$

где $1_{\varepsilon(\lambda)} = 1_{(0,\infty)}(t) = 1_+(t)$ – индикаторная функция множества $(0, \infty)$, если $\mathrm{Im}\lambda > 0$ и $1_{\varepsilon(\lambda)}(t) = 1_-(t)$, если $\mathrm{Im}\lambda < 0$.

Поставим задачу: найти решение u операторного уравнения

$$B_t^* u = A_x u, \tag{1_0}$$

удовлетворяющее условию

$$\langle g,u\rangle_t = \varphi(x), \text{ где } \varphi \in L^2(0,1) \text{ и } g(t) = t; \tag{$2_а$}$$

$$\langle \delta,u\rangle_t = u(0,x) = \varphi(x). \tag{$2_б$}$$

ТЕОРЕМА 1. Однородная задача (1_0), ($2_а$) при любой $\varphi \in L^2(0,1)$ имеет единственное решение $u \in L^2(R\times[0,1])$, задаваемое рядом

$$u(t,x) = 1_+(t-a)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_k)}{(k-0{,}5)^4 + (k-0{,}5)^2 a} \cdot e^{-\frac{4(t-a)}{(2k-1)^2}} Cos(2k-1)\pi x. \tag{3}$$

Если ряд из коэффициентов Фурье $(\varphi, \varphi_\kappa)$ абсолютно сходится, то задача (1_0), ($2_б$) имеет единственное решение $u \in L^2(R\times[0,1])$, которое задается рядом

$$u(t,x) = 1_+(t-a)\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,\varphi_k)e^{-\frac{4t}{(2k-1)^2}} Cos(2k-1)\pi x. \tag{4}$$

Ряды (3) и (4) равномерно сходятся на $R\times[0,1]$.

4. Неоднородная задача. Пусть $f \in L^2(R\times[0,1])$. Сохраняя прежние обозначения, рассмотрим неоднородную задачу: найти решение u уравнения

$$B_t{*}u = A_x u + f, \qquad (1_н)$$

удовлетворяющее условию

$$u(\cdot\,,) \in D(\overset{\circ}{B}_t), \qquad (5)$$

где $\overset{\circ}{B}_t$ – самосопряженное расширение оператора B_t, например, $\overset{\circ}{B}_t$ – оператор дифференцирования, заданный на множестве абсолютно непрерывных функций $f \in \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})$ таких, что $f' \in L^2(R)$.

ТЕОРЕМА 2. Задача $(1_н)$, (5) имеет единственное решение u

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} R_{\lambda_k}(\overset{\circ}{B}_t) b_k(t) \varphi_k(x),$$

где $b_k(t) = (f(t,\cdot),\varphi_\kappa)$, $R_{\lambda_k}(\overset{\circ}{B}_t)$ – резольвента оператора $\overset{\circ}{B}_t$, в точке λ_κ.

ТЕОРЕМА 3. Задача $(1_н)$, $(2_а)$ имеет единственное решение

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} R_{\lambda_k}(B_t^{\theta_k}) b_k Cos(2k-1)\pi x,$$

где при каждом κ $R_{\lambda_k}(B_t^{\theta_k})$ определяется формулой (1), θ_κ ($|\theta_\kappa| \le 1$) подбирается так, чтобы выполнялось $(2_а)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров Е.Л.* О спектральных функциях одного интегрального оператора с ядром Карлемана // Изв. вузов. Сер. математика. 1979. № 7. С. 3 - 12 .

2. *Александров Е.Л.* Резольвенты и спектральные функции операторов свертки. Саратов, 1997. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 14.04.97, № 1246 – В97.

УДК 519.61

Ю. П. Васильев

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Наличие параллельных ЭВМ и систем с матричными языками программирования позволяет ставить задачи и разрабатывать численные методы их решения в обобщенном операторном виде.

В данной работе рассматривается приближенное решение полной проблемы собственных значений для линейного оператора в конечномерном пространстве