$$B_t{*}u = A_x u + f, \qquad (1_н)$$

удовлетворяющее условию

$$u(\cdot\,,) \in D(\overset{\circ}{B}_t), \qquad (5)$$

где $\overset{\circ}{B}_t$ – самосопряженное расширение оператора B_t, например, $\overset{\circ}{B}_t$ – оператор дифференцирования, заданный на множестве абсолютно непрерывных функций $f \in \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R})$ таких, что $f' \in L^2(R)$.

ТЕОРЕМА 2. Задача $(1_н)$, (5) имеет единственное решение u

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} R_{\lambda_k}(\overset{\circ}{B}_t)\, b_k(t)\, \varphi_k(x),$$

где $b_k(t) = (f(t,\cdot\,), \varphi_к)$, $R_{\lambda_k}(\overset{\circ}{B}_t)$ – резольвента оператора $\overset{\circ}{B}_t$, в точке $\lambda_к$.

ТЕОРЕМА 3. Задача $(1_н)$, $(2_а)$ имеет единственное решение

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} R_{\lambda_k}(B_t^{\theta_k})\, b_k Cos(2k-1)\pi x,$$

где при каждом $к$ $R_{\lambda_k}(B_t^{\theta_k})$ определяется формулой (1), $\theta_к$ ($|\theta_к| \le 1$) подбирается так, чтобы выполнялось $(2_а)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров Е.Л.* О спектральных функциях одного интегрального оператора с ядром Карлемана // Изв. вузов. Сер. математика. 1979. № 7. С. 3 - 12 .

2. *Александров Е.Л.* Резольвенты и спектральные функции операторов свертки. Саратов, 1997. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 14.04.97, № 1246 – В97.

УДК 519.61

Ю. П. Васильев

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Наличие параллельных ЭВМ и систем с матричными языками программирования позволяет ставить задачи и разрабатывать численные методы их решения в обобщенном операторном виде.

В данной работе рассматривается приближенное решение полной проблемы собственных значений для линейного оператора в конечномерном пространстве

$$AX = X\Lambda, \tag{1}$$

где A – квадратная матрица, $X \neq \Theta$ – искомая матрица из собственных векторов, Λ – искомая матрица из собственных значений [1]. A, X, Λ рассматриваем как элементы из пространства $R_{n,n}$. Θ – нулевой элемент $(\Theta \in R_{n,n})$. Для получения единственного решения введём " нормирующий " линейный оператор $G \in R_{n,n}$, который выбирается в зависимости от решаемой задачи и вида матрицы A. (В случае, скажем, матрицы простой структуры [2] – в виде диагональной матрицы.) Таким образом, для построения численного метода решения полной проблемы собственных значений ставится задача решения нелинейной системы матричных уравнений

$$AX = X\Lambda, \tag{2}$$

$$GX = I, \tag{3}$$

где (3) – условия, "нормирующие" матрицу собственных векторов X. $I \in R_{n,n}$ (в простейшем случае – единичная матрица).

Представим задачу (2), (3) в виде нелинейного операторного уравнения

$$T(X, \Lambda) = \begin{bmatrix} AX - X\Lambda \\ GX - I \end{bmatrix} = 0, \tag{4}$$

где T – нелинейный оператор.

Для решения нелинейного уравнения (4) применим итерационный метод Ньютона [1]

$$Y^{k+1} = Y^k - (T'(Y^k))^{-1} T(Y^k), Y^0 \in R, k = 0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Алгоритм метода. Алгоритм метода сводит решение нелинейного матричного уравнения (4) к решению системы нелинейных скалярных уравнений

$$T(Y) = 0 \tag{6}$$

методом (5). Далее для пояснений рассмотрим случай матрицы простой структуры. При этом (6) будет системой из $n^2 + n$ эквивалентных в смысле решения скалярных уравнений с решением в виде вектора-решения Y размера $n^2 + n \times 1$ из элементов строк матриц X, Λ. Используя операции тензорного произведения "$\otimes$" [2] , получим для (6) выражение вида

$$T(Y) = \begin{bmatrix} A \otimes I - I \otimes \Lambda' & 0 \\ \widetilde{G} & 0 \end{bmatrix} Y - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0, \tag{7}$$

где I – единичная матрица n-го порядка, $\widetilde{G}$ – матрица размера $n \times n^2$, элементы которой равны единице, если они соответствуют диагональным элементам матрицы X в преобразовании (3), остальные – нули.

Производную нелинейного оператора T в (5) определим следующим образом [1]

$$T(X+W,\Lambda+V)-T(X,\Lambda)=T'(X,\Lambda)\begin{bmatrix}W\\V\end{bmatrix}+o(W,V),$$

где

$$T'(X,\Lambda)\begin{bmatrix}W\\V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AW-W\Lambda-XV\\GW\end{bmatrix}, \qquad (8)$$

W и V – малые приращения матричного аргумента, $o(W,V)$ – величина более высокого порядка малости. Эквивалентное выражение для (8) примет вид линейного оператора

$$T'(X,\Lambda)Z=\begin{bmatrix}A\otimes I-I\otimes\Lambda' & XQ\\ \widetilde{G} & 0\end{bmatrix}Z, \qquad (9)$$

где Z – вектор размера n^2+n из строк матриц W и $V, R=XQ$ – матрица преобразования RZ_n размера $n^2\times n$, Z_n – вектор размера $n\times 1$ из последних n элементов вектора Z, Q – матрица преобразования R с нулевыми и единичными элементами.

Через нули в выражениях (6), (7), (9) обозначены матрицы и векторы с нулевыми элементами соответствующих размеров.
На каждом шаге итераций по формуле (5) решается система линейных алгебраических уравнений

$$T'(Y^k)\Delta Y^k=-T(Y^k),\ \ Y^0\in R,$$
$$Y^{k+1}=Y^k+\Delta Y^k,\quad k=0,1,2,\ldots$$

Итерации заканчиваются при $\left\|T(Y^{k+1})\right\|\le\varepsilon$, где ε - заданная точность.

При воспроизведении алгоритма решения на ЭВМ предполагается наличие соответствующих операций над матрицами. В частности, имеются операции тензорного (кронекерова) произведения, преобразование матрицы в вектор из строк, формирование матрицы R. Алгоритм метода был реализован на ЭВМ в системе MATLAB [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М., 1978.

2. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., 1978.

3. *Потёмкин В.Г.* Система MATLAB. М., 1997.