некоррелированности ошибок наблюдения во времени и пространстве. Возможно, такое предположение не вполне реалистично хотя бы во второй своей части – в едином государстве нет экономически и политически изолированных субъектов, процессы в соседних регионах взаимосвязаны, хотя связь определяется не только расстоянием. Для учета данного фактора в рамках расширенной модели со случайным эффектом [3] требуется оценка некоторой весовой диагональной матрицы, определяющей близость между объектами. Соответственно итоговая модель зависит от принципов, по которым строится матрица. Оценив матрицу, можно проверить гипотезы о пространственной и временной автокорреляции для случайного эффекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Касьян Г.А.* Скачок смертности в России: результаты анализа международных панельных данных // Препринт # BSP/02/055 R. М.: Российская экономическая школа, 2002. 64 с.

2. *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс: Учебник. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2004. 576 с.

3. *Baltagi B.H., Song S.H., Jung B.C., Koh W.* Testing for serial correlation, spatial autocorrelation and random effects using panel data //J. of Econometrics. 2007. V.140, №1. P.5-51

УДК 519.853.3

Е.А. Мещерякова

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ПО ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ

Пусть D — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^p$, $int\mathrm{D}\neq\varnothing$, $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Функции

$$R(x)=\max_{y\in D} n(x-y),\ \rho_D(x)=\min_{y\in D} n(x-y)$$

выражают соответственно расстояния от точки x до самой удаленной и самой близкой точки множества D. Известно, что функция $R(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^p$, а $\rho_\Omega(x)$, где $\Omega=\overline{\mathbb{R}^p\backslash D}$, является вогнутой функцией на D. Задачей асферичности выпуклого компакта D называют

$$\varphi_1(x)\equiv\frac{R(x)}{\rho_\Omega(x)}\longrightarrow\min_{x\in D}. \tag{1}$$

Задача о постороении шарового слоя наименьшего объема, содержащего границу выпуклого компакта D сводится к задаче

$$\varphi_2(x)\equiv R^p(x)-\rho_\Omega^p(x)\longrightarrow\min_{x\in D}. \tag{2}$$

Оптимальные значения целевых функций задач (1) и (2) по разному отражают величину отличия выпуклого компакта D от шара нормы $n(x)$. В этом смысле данные задачи сравнимы с задачей построения шарового слоя наименьшей толщины, содержащего границу компакта D [1], и с задачей Хаусдорфова приближения компакта D шаром нормы $n(x)$ [2]. Примеры показывают, что решения всех перечисленных задач могут быть разными. Цель статьи — получить необходимые условия решения задач (1) и (2).

Теорема 1. *Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются субдифференцируемыми (в смысле В.Д. Демьянова, А.М. Рубинова [3]) всюду на D, причем их субдифференциалы можно выразить следующими формулами:*

$$\underline{\partial\varphi_1}(x) = \rho_\Omega^{-2}(x)\left(\rho_\Omega(x)\underline{\partial R}(x) - R(x)\overline{\partial\rho_\Omega}(x)\right), \tag{3}$$

$$\underline{\partial\varphi_2}(x) = p(R^{p-1}(x)\underline{\partial R}(x) - \rho_\Omega^{p-1}(x)\overline{\rho_\Omega}(x)). \tag{4}$$

где $\underline{\partial R}(x)$ –субдифференциал выпуклой функции $R(x)$, $\overline{\rho_\Omega}(x)$ – супердифференциал вогнутой на D функции $\rho_\Omega(x)$.

Доказательство. Функция $R(x)$ – выпуклая на $\mathbb{R}^p$, $\rho_\Omega(x)$ – вогнутая функция на D, поэтому их квазидифференциалы (в определении [3, с. 128]) можно записать в виде

$$\mathcal{D}R(x) = \left[\underline{\partial R}(x), \{0_p\}\right], \mathcal{D}\rho_\Omega(x) = \left[\{0_p\}, \overline{\rho_\Omega}(x)\right].$$

Используя правила квазидифференциального исчисления (см. [1]), имеем

$$\mathcal{D}\left[\frac{1}{\rho_\Omega(x)}\right] = \left[-\frac{\overline{\partial\rho_\Omega}(x)}{\rho_\Omega^2(x)}, \{0_p\}\right],$$

и тогда

$$\mathcal{D}\left[\frac{R(x)}{\rho_\Omega(x)}\right] = \left[R(x)\left(-\frac{\overline{\partial\rho_\Omega}(x)}{\rho_\Omega^2(x)}\right) + \frac{\underline{\partial R}(x)}{\rho_\Omega(x)}, \{0_p\}\right].$$

Таким образом, субдифференциал функции $\underline{\partial\varphi_1}(x)$ принимает вид (3). По индукции, используя формулу квазидифференциала произведения квазидифференцируемых функций, получаем

$$\mathcal{D}[R^p(x)] = [pR^{p-1}(x)\underline{\partial R}(x), \{0_p\}],$$

$$\mathcal{D}[\rho_\Omega^p(x)] = [\{0_p\}, p\rho_\Omega^{p-1}(x)\overline{\partial\rho_\Omega}(x)].$$

Отсюда вытекает

$$\mathcal{D}\left[R^p(x) - \rho^p(x)\right] = \left[p\left(R^{p-1}(x)\underline{\partial R}(x) - \rho^{p-1}(x)\overline{\partial\rho}(x)\right), \{0_p\}\right],$$

а значит, и формула (4).

Теорема 2. *Если $x^* \in intD$ – решение задачи (1), то*

$$\rho_\Omega(x^*)\underline{\partial R}(x^*) \cap R(x^*)\overline{\partial \rho_\Omega}(x^*) \neq \varnothing. \tag{5}$$

Доказательство. В соответствии с условием минимума субдифференцируемой функции для $x^* \in intD$ ([3, с. 239]) должно выполняться $0_p \in \underline{\partial \varphi_1}(x^*)$, что в соответствии с формулой (3) эквивалентно

$$0_p \in \left(\rho_\Omega(x^*)\underline{\partial R}(x^*) - R(x^*)\overline{\partial \rho_\Omega}(x^*)\right)$$

или соотношению (5).

Теорема 3. *Если точка $x^* \in D$ является решением задачи (2), то*

$$\left[R^{p-1}(x^*)\underline{\partial R}(x^*) - \rho_\Omega^{p-1}(x^*)\overline{\partial \rho_\Omega}(x^*)\right] \cap K^+(x^*, D) \neq \varnothing, \tag{6}$$

где $K^+(x^*, D)$ – сопряженный конус к конусу возможных направлений множества D в точке x.

Доказательство. В соответствии с условием минимума субдифференцируемой функции на заданном выпуклом множестве [3, с. 239] должно выполняться соотношение $\underline{\partial \varphi_2}(x^*) \cap K^+(x^*, D) \neq \varnothing$, которое, учитывая формулу (4), эквивалентно (6).

Замечание. Формулы субдифференциала функции $R(x)$ и субдифференциала функции $\rho_\Omega(x)$, в которых отражается зависимость от нормы и множества D имеются в [2]. Это придает соотношениям (5) и (6) конструктивный вид и позволяет решать конкретные задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Боннезен Т. Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: ФАЗИС, 2002.

2. *Дудов С. И. Златорунская И.В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы //Мат.сб. 2000, Т. 191, №10. С. 13-38.

3. *Демьянов В. Ф. Рубинов А.М.* Основы выпуклого анализа и квазидифференциального исчисления. М.: Наука, 1990.

УДК 519.4

В.А. Молчанов

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛОГИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЯЗЫКОВ

В настоящей статье продолжается исследование языков произвольных слов, начало которому было положено в [1]. Рассматривается конечный алфавит A и следующие множества слов: $W_{fin}(A)$ – множество всех конечных слов, $W^{\rightarrow}(A)$ – множество всех бесконечных вправо слов, $W^{\leftarrow}(A)$ – множество всех бесконечных влево слов, $W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество всех бесконечных в