$Q_{в.р.}(\varepsilon) = q \cdot n_0(\varepsilon) = 50 \cdot N \cdot n_0(\varepsilon)$. Сравним с методом Гаусса. Найдем коэффициент эффективности

$$K = Q_Г / Q_{в.р.}(\varepsilon) = (N^2 + 3N - 1)/(75 \cdot n_0(\varepsilon)).$$

При N = 121, что соответствует h = 1/8, $\varepsilon = 10^{-4}$, $n_0(\varepsilon)$ = 4, получим K=50, т.е. количество действий при решении системы разностных уравнений (6) итерационным методом верхней релаксации в 50 раз меньше, чем при решении прямым методом Гаусса. Кроме того, итерационный метод является экономичным в том смысле, что не требует хранения в памяти матрицы $\bar{A}$ размерности 121×122 = 14762. При увеличении порядка системы (6), коэффициент K возрастает.

Итак, для решения системы разностных уравнений большого порядка, соответствующих задаче (6), целесообразно применять итерационный метод верхней релаксации, который является эффективным и экономичным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М. :Наука, 1978.

2. *Вахлаева Л.Ф., Крысько В.А., Соколов С.С.* О выборе порядка аппроксимации разностной краевой задачи теории оболочек // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. науч. сб. Саратов, 1981. С. 45 - 49.

УДК 513.88

А. П. Гуревич, А. П. Хромов

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

В пространстве $L[0,1]$ рассмотрим оператор

$$Af = A_0 f + \sum_{k=1}^{m} g_k(f, v_k),$$

где

$$A_0 f = \alpha_1 \int_0^x f(t)\,dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} f(t)\,dt, \quad (f, v_k) = \int_0^1 f(t) v_k(t)\,dt, \;\; g_k(x), v_k(x) \in C^1[0,1].$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.

Предполагаем, что системы $\{g_k'(x)\}_1^m, \{v_k(x)\}_1^m$ линейно независимы и $\delta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$.

Обозначим через $R_\lambda f = (E - \lambda A)^{-1} Af = \int_0^1 G(x,t,\lambda) f(t)\,dt$ (E - единичные оператор) резольвенту Фредгольма оператора A. В настоящей статье при некоторых предположениях относительно оператора A найдены необходимые и достаточные условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней на всем отрезке [0,1] средних вида

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|} g(\lambda,r) R_\lambda f\, d\lambda \quad ,$$

где $g(\lambda,r)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;

б) существует $C > 0$ такая, что $|g(\lambda,r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$;

в) существуют положительные β_1, β_2 такие, что

$$g(re^{i\varphi},r) = O\left(\left|\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right|^{\beta_1} \left|\varphi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right|^{\beta_2}\right),$$

где $\alpha = \arg\sqrt{\delta}$ (оценки равномерны по r);

г) $g(\lambda,r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Примерами таких функций могут служить функции вида

$$g(\lambda,r) = g_1(\lambda,r) g_2(\lambda,r),$$

где

$$g_1(\lambda,r) = \left(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\alpha - \pi/2)}\right)^{\beta_1} \left(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\alpha - \pi/2)}\right)^{\beta_2}, \beta_1, \beta_2 > 0,$$

$$g_2(\lambda,r) = \left(1 - \frac{f(\lambda)}{M_r(f)}\right)^{\beta_3}, \ M_r(f) = \max_{|\lambda|=r} |f(\lambda)|, \ \beta_3 \ge 0.$$

Отметим, что для случая дифференциального оператора n-го порядка с регулярными по Биркгофу краевыми условиями [1, с.66] М.Стоун [2] исследовал средние по Риссу спектральных разложений, представимые в виде

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^l \widetilde{R}_\lambda f\, d\lambda, \ l > 0$$

($\widetilde{R}_\lambda$ - резольвента дифференциального оператора) и показал, что на каждом $[a,b] \subset (0,1)$ имеет место равносуммируемость их с такими же средними обычных тригонометрических разложений в ряды Фурье. Этой же тематике посвящены работы [3 - 5] .

В дальнейшем важную роль будет играть вид оператора A^{-1}. Поэтому укажем сначала условия его существования. Обозначим через $M=(m_{ij})(i=1,\dots,m+1;\ j=1,\dots,m)$ матрицу с элементами $m_{1j}=U(g_j)(j=1,\dots,m);\ m_{ij}=\delta_{i,j+1}+(Lg_{j,}v_{i-1})(i=2,\dots,m+1;\ j=1,\dots,m)$.

Здесь $u(f)=\alpha_1 f(0)\_\alpha_2 f(1),\ Lf=\delta^{-1}\{\alpha_1 f'(x)+\alpha_2 f'(1-x)\},\ \delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

ТЕОРЕМА 1. Оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда
$$rangM=m.$$

Будем предполагать, что A^{-1} существует. Обозначим $\mu=\lambda\sqrt{\delta};\ S_\varepsilon$ - область, получающаяся из λ-плоскости удалением всех собственных значений A^{-1} вместе с их круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса $\varepsilon>0$; $\|\cdot\|$ - норма в $C[0,1]$.

ТЕОРЕМА 2. Если $f(x)\in C[0,1]$, а $\lambda\in S_\varepsilon$, то
$$\|R_\lambda f\|=O\left(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\|f\|\right).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x),g_0(x)\in C[0,1]$. Тогда, если на окружности $|\lambda|=r$ нет характеристических чисел оператора A, то
$$f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f(x)\,d\lambda=f(x)(1-g(\mu_0,r))+g(\mu_0,r)[f(x)-f_0(x)]+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{g(\lambda,r)}{\lambda-\mu_0}R_\lambda g_0(x)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda[f(x)-f_0(x)]\,d\lambda,$$
где μ_0 - произвольное комплексное число ($|\mu_0|<r$), не являющееся характеристическим значением оператора A.

ТЕОРЕМА 4. Область значения оператора A состоит из всевозможных абсолютно непрерывных функций $y(x)$, удовлетворяющих условию вида
$$\delta_1 y(0)-\delta_2 y(1)-(y,w)=0 \tag{1}$$
где $w(x)\in C[0,1]$.

ТЕОРЕМА 5. Замыкание D^0 области значений оператора A в метрике $C[0,1]$ совпадает с множеством непрерывных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих (1).

ТЕОРЕМА 6. Для того, чтобы
$$\lim_{r\to\infty}\left\|f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f(x)d\lambda\right\|=0,$$
необходимо и достаточно, чтобы $f(x)\in D^0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

2. *Стоун М.Н.* // Trans.Amer.Math. 1926. Vol. 28. P. 695 - 761.

3. *Хромов А.П.* // ДАН СССР. 1962. Т. 146, № 6. С. 1294 - 1297.

4. *Тихомиров В.В.* // ДАН СССР. 1976. Т. 226, № 5. С. 1015 - 1017.

5. *Тихомиров В.В.* // Мат. сб. 1977. Т. 102, № 1. С. 33 - 55.

УДК 511.2

Г. И. Гусев

ОБ ИЗОМЕТРИЯХ В НЕАРХИМЕДОВЫХ ПОЛЯХ, СВЯЗАННЫХ С РЯДАМИ НЬЮТОНА

Пусть (K, φ) - нормированное поле, где φ - нетривиальная неархимедова норма. Будем считать, что характеристика поля равна нулю. Обозначим

$V = \{\alpha \mid \alpha \in K;\ \varphi(\alpha) \le 1\}$ - кольцо нормирования поля K,

$P = \{\alpha \mid \alpha \in K;\ \varphi(\alpha) < 1\}$ - идеал нормирования,

$E = \{\varepsilon \mid \varepsilon \in K;\ \varphi(\varepsilon) = 1\}$ - группа единиц поля K,

$F = V/P$ – поле классов вычетов по mod P (поле вычетов).

Известен следующий критерий локальной компактности неархимедова поля.

ТЕОРЕМА [1, с. 43]. Неархимедово поле (K, φ) является локально компактным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. (K, φ) является полным полем.
2. Идеал нормирования P является главным, т. е. существует такой простой элемент $\pi \in K$, что $P = \pi V$.
3. Поле вычетов F поля K является конечным.

В нашем случае поле K является конечным расширением некоторого поля Q_p p-адических чисел, где p – простое, причём $p = \pi^e \varepsilon$, где e – натуральное и $\varepsilon \in E$.

<u>Определение 1</u>. Отображение $\sigma : V \to V$ называется изометрией V, если для произвольных $a, b \in V$

$$\varphi(\sigma(a) - \sigma(b)) = \varphi(a - b).$$

<u>Определение 2</u>. Отображение $\tau : E \to E$ называется изометрией E, если для произвольных $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in E$

$$\varphi(\tau(\varepsilon) - \tau(\tilde{\varepsilon})) = \varphi(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}).$$

С компактами V и E связаны группы изометрий $Gl\,s(V)$ и $Gl\,s(E)$.