ТЕОРЕМА 2. В условиях и обозначениях леммы для произвольного степенного ряда $f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ с целыми π-адическими коэффициентами, сходящегося на компакте V, имеют место следующие изометрические эквивалентности:

1. $x^n+\pi^\nu x^n f(x)\cong x^n$ на компакте V;

2. $\varepsilon^n+\pi^\nu \varepsilon^n f(\varepsilon^{-1})\cong \varepsilon^n$ на компакте E.

Доказательство. В силу теоремы 1 существуют такие изометрии σ и τ соответствующих компактов V и E, что

$$\forall x\in V:\ x^n+\pi^\nu x^n f(x)=\sigma^n(x)$$

и

$$\forall \varepsilon\in E:\ \varepsilon^n+\pi^\nu \varepsilon^n f(\varepsilon^{-1})=\tau^n(\varepsilon).$$

Таким образом, утверждения 1 и 2 доказаны.

Примечание. Теорема 2 находит многочисленные приложения в теории рациональных тригонометрических сумм, диофантовом анализе и в теории интегрирования по аддитивной мере Хаара в p-адических полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ленской Д.Н.* Функции в неархимедовски нормированных полях. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1962.

2. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1972.

УДК 519.853.3

С. И. Дудов, И. В. Златорунская

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Пусть D - заданный выпуклый компакт из $\Re^p$, функция $n(x)$ удовлетворяет на $\Re^p$ аксиомам нормы. Обозначим через

$$\Omega=\overline{\Re^p\setminus D},\quad R(x)=\max_{y\in D} n(x-y),$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.

$$\rho_D(x)=\min_{y\in D} n(x-y),\quad P(x)=\rho_D(x)-\rho_\Omega(x).$$

Рассмотрим следующую задачу

$$\Phi(x)\equiv R(x)+P(x)\to\min_{x\in\Re^p}\ . \tag{1}$$

Известно [1, 2], что к этой задаче сводится задача наилучшего приближения выпуклого компакта D шаром в норме $n(\cdot)$. Легко видно, что функция $R(x)$ является выпуклой и, как показано в [2], функция $P(x)$ также выпукла и конечна на $\Re^p$. Поэтому задача (1) является задачей выпуклого программирования. Получим необходимое и достаточное условие ее решения.

Будем далее обозначать через $Q^R(x,D)=\{y\in D/n(x-y)=R(x)\}$, $Q^\rho(x,A)=\{z\in A/n(x-z)=\rho_A(x)\}$, $\partial n(x)$ - субдифференциал нормы $n(\cdot)$ в точке x, $K(x,D)$ - конус возможных направлений множества D в точке x, K^+ - сопряжение конуса K, coA выпуклую оболочку множества A, $\langle.,.\rangle$ - скалярное произведение, $n^*(x)=\max\limits_{n(v)\le 1}\langle v,x\rangle$.

Для получения условий оптимальности в задаче (1) необходимо располагать дифференциальными характеристиками выпуклых функций $R(x)$ и $P(x)$, т.е. их субдифференциалами.

Используя теорему 3.6 из [3], а также замкнутость множества $Q^R(x,D)$ и полунепрерывность субдифференциала нормы $\partial n(\cdot)$, как многозначного отображения: $\Re^p\to 2^{\Re^p}$, нетрудно доказать следующий факт.

ТЕОРЕМА 1. Для субдифференциала функции $R(x)$ справедлива формула

$$\underline{\partial R}(x)=co\{\partial n(x-y)/y\in Q^R(x,D)\},\forall x\in\Re^p. \tag{2}$$

В работе [4] доказано, что субдифференциал выпуклой функции $\rho_D(x)$ можно выразить в виде

$$\underline{\partial\rho_D}(x)=\partial n(x-y)\cap -K^+(z,D),\quad \forall z\in Q^\rho(x,D),\ x\in\Re^p, \tag{3}$$

а супердифференциал вогнутой на множестве D функции $\rho_\Omega(x)$ в виде

$$\overline{\partial\rho_\Omega}(x)=co\{v\in K^+(z,D)/n^*(v)=1,\ z\in Q^\rho(x,\Omega)\},\quad \forall x\in\operatorname{int}D. \tag{4}$$

Используя формулы (3), (4), нетрудно показать, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Субдифференциал выпуклой функции $P(x)$ можно записать в виде

$$\underline{\partial P}(x)=\begin{cases}\partial n(x-y)\cap -K^+(z,D),\ \ \forall z\in Q^\rho(x,D),\ \text{если } x\notin D,\\ co\{v\in -K^+(z,D)/n^*(v)=1,\ z\in Q^\rho(x,\Omega)\},\ \text{если } x\in D.\end{cases} \tag{5}$$

Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы точка x_0 была решением задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$o_p \in \underline{\partial}\Phi(x_0) \equiv \underline{\partial}R(x_0) + \underline{\partial}P(x_0), \tag{6}$$

где $\underline{\partial}R(x_0)$ и $\underline{\partial}P(x_0)$ определяются формулами (2) и (5).

Доказательство. Функция $\Phi(x)$, как сумма выпуклых и конечных функций, сама является выпуклой и конечной. Ее субдифференциал, по теореме Моро-Рокафеллара, есть алгебраическая сумма $\underline{\partial}R(x)$ и $\underline{\partial}P(x)$. Поэтому, в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см., например, [3]), необходимым и достаточным условием решения задачи (1) является включение (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский М.С., Силин Д.Б.* О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Тр. Мат. ин - та им. В.А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 338 - 354.

2. *Златорунская И.В.* О редукции задачи равномерной оценки выпуклого компакта шаром произвольной нормы к задаче выпуклого программирования // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун - та, 1999. С. 116 – 120.

3. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982.

4. *Дудов С.И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530 - 542.

УДК 511.335

Л. А. Евтеева, Н. И. Климов, Ю. В. Славина

АСИМПТОТИКА СУММ С ФУНКЦИЯМИ МЁБИУСА И ЭЙЛЕРА

При применении метода решета Сельберга к проблеме простых чисел арифметической прогрессии используются асимптотики сумм, содержащих функции Мёбиуса μ и Эйлера φ. Основное переменное действительное $z \to \infty$, c - произвольно большая постоянная, k - натуральный параметр, p – простое число, $s = \sigma + it$.

ТЕОРЕМА 1 (Климов – Славина). Пусть k удовлетворяет условию

$$k = O\left(z^c\right., \tag{1}$$

тогда

$$S_1(z, k) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \le z, (n, k)=1} \frac{\mu^2(n)n}{\varphi(n)} \sim \frac{\varphi(k)}{k} z.$$