ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы точка x_0 была решением задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$o_p \in \underline{\partial}\Phi(x_0) \equiv \underline{\partial R}(x_0) + \underline{\partial P}(x_0), \qquad (6)$$

где $\underline{\partial R}(x_0)$ и $\underline{\partial P}(x_0)$ определяются формулами (2) и (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $\Phi(x)$, как сумма выпуклых и конечных функций, сама является выпуклой и конечной. Ее субдифференциал, по теореме Моро-Рокафеллара, есть алгебраическая сумма $\underline{\partial R}(x)$ и $\underline{\partial P}(x)$. Поэтому, в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см., например, [3]), необходимым и достаточным условием решения задачи (1) является включение (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский М.С., Силин Д.Б.* О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Тр. Мат. ин - та им. В.А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 338 - 354.

2. *Златорунская И.В.* О редукции задачи равномерной оценки выпуклого компакта шаром произвольной нормы к задаче выпуклого программирования // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун - та, 1999. С. 116 – 120.

3. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982.

4. *Дудов С.И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530 - 542.

УДК 511.335

Л. А. Евтеева, Н. И. Климов, Ю. В. Славина

АСИМПТОТИКА СУММ С ФУНКЦИЯМИ МЁБИУСА И ЭЙЛЕРА

При применении метода решета Сельберга к проблеме простых чисел арифметической прогрессии используются асимптотики сумм, содержащих функции Мёбиуса μ и Эйлера φ. Основное переменное действительное $z \to \infty$, c - произвольно большая постоянная, k - натуральный параметр, p – простое число, $s = \sigma + it$.

ТЕОРЕМА 1 (Климов – Славина). Пусть k удовлетворяет условию

$$k = O\left(z^c\right., \qquad (1)$$

тогда

$$S_1(z, k) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{n \le z, (n,k)=1} \frac{\mu^2(n)n}{\varphi(n)} \sim \frac{\varphi(k)}{k} z.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\sigma>1$ аналитическая производящая функция

$$P(s,k)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=1,(n,k)=1}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)n^{s-1}}=G(s,k)\zeta(s),$$

где $\zeta(s)$ - функция Римана,

$$G(s,k)=P_1(s,k)\prod\nolimits_1(s,k),\quad \prod\nolimits_1(s,k)=\prod_{p/k}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

$$P_1(s,k)=\prod_{p,(p,k)=1}\left(1+\frac{1}{(p-1)p^s}-\frac{1}{(p-1)p^{2s}}\right)$$

– абсолютно и равномерно относительно параметра k сходящееся при $\sigma\geq\sigma_1>1/2$ бесконечное произведение.

Обобщая фундаментальную формулу [1, формула (14), с. 43], получим при $\sigma_0>1$

$$\int_1^z S_1(u,k)du=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma_0)}z^{s+1}g(s,k)ds,$$

где $g(s,k)=s^{-1}(s+1)^{-1}P(s,k)$; законность необходимых преобразований обеспечивается абсолютной сходимостью интеграла ввиду наличия множителя s^2 в знаменателе.

Перенесём контур интегрирования налево от полюса в точке $\sigma=1$, например, на прямую $\sigma_1=3/4$; это возможно, так как при фиксированных z, k остаток интеграла по бесконечному контуру по модулю $<\varepsilon$, $\varepsilon>0$, за счёт оценки $|\zeta(s)|$ и множителя s^{-2}. По теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{z^2}\int_1^z S_1(u,k)du=\frac{1}{2}\frac{\varphi(k)}{k}(1+I(z,k)),\quad I(z,k)=\frac{k}{\varphi(k)\pi i}\int_{(\sigma_1)}z^{s-1}g(s,k)ds.$$

Для оценки $I(z,k)$ основное – оценка $\prod_1(s,k)$: при условии (1)

$$\prod\nolimits_1(s,k)=\sum_{d/k}\frac{\mu(d)}{d^s}=O\left(\sum_{d/k}\frac{1}{d^{\sigma_1}}\right)=O(\tau(k))=O(z^{\varepsilon}),$$

где $\tau(k)$ - число делителей, $\varepsilon>0$; при $z\to\infty$ $I(z,k)\to 0$ за счёт множителя $z^{-1/4+\varepsilon}$.

Переход к $S_1(z,k)$ осуществляется обобщением, что при условии (1) возможно (!), известной теоремы C из кн. [1, с. 48].

ТЕОРЕМА 2 (Евтеева – Климов). При условии (1) из теоремы 1

$$S_2(z,k)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n\leq z,(n,k)=1}\mu^2(n)\sim\prod_{p,(p,k)=1}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{\varphi(k)}{k}z.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используется по методу Ландау-Перрона [2, с. 427, теорема 3.1; с. 70 - 72, теоремы 3.2, 3.3] прямоугольный контур Г с вершинами $(a-iT, a+iT, b+iT, b-iT)$, содержащий полюс производящей функции в точке $\sigma=1$, где выбрано $a=3/4, b=1+(\ln z)^{-1}, T=\sqrt{z}$. Имеем

$$S_2(z, k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{z^s}{s}G^*(s, k)\zeta(s)ds+O\left(\frac{z^b}{T(b-1)}+\frac{z\ln z}{T}\right),$$

где $G^*(s, k)=P_1^*(s, k)\prod_1(s, k)\zeta(s)$, $P_1^*(s, k)$ – абсолютно сходящееся при $\sigma>1/2$ бесконечное произведение; по теореме Коши последний интеграл выражается через

$$\operatorname*{res}_{s=1}G^*(s, k)\zeta(s)\frac{z^s}{s}=\prod_{p,(p,k)=1}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{\varphi(k)}{k}z$$

и интегралы по остальным сторонам контура Г. Эти интегралы оцениваются как и в доказательстве теоремы 1. На вертикальном участке понижающим множителем является $z^{-1/4+\varepsilon}$. На горизонтальном участке понижающим множителем является T^{-1}:

$$\left|\int_{a+iT}^{b+iT}\frac{z}{s}G^*(s, k)\zeta(s)\,ds\right|=O\left(z^{1+\varepsilon}T^{1/4-1}\right)=o\left(\frac{\varphi(k)}{k}\right).$$

ТЕОРЕМА 3 (Климов). Пусть $k, z\to\infty$ таким образом, что

$$\frac{k^2}{\varphi^2(k)}\sum_{p/k}\frac{\ln p}{p}=o(\ln z), \qquad (2)$$

тогда имеют место асимптотические формулы для $S_1(z, k)$, $S_2(z, k)$, сформулированные в теоремах 1 и 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Использована, как в доказательстве теоремы 1, фундаментальная формула; $\prod_1(s, k)$ разбивается на три суммы

$$\prod\nolimits_1(s, k)=\sum_{d/k, d\geq z}\frac{\mu(d)}{d^s}+\sum_{d/k, d\leq z^{1-\varepsilon}}\frac{\mu(d)}{d^s}+\sum_{d/k, z^{1-\varepsilon}<d<z}\frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Для первого слагаемого используется контур $\sigma=\sigma_0$, тогда в знаменателе велико $d^{\sigma 0}$; для второго и третьего слагаемых контур интегрирования переносится на прямую $\sigma=\sigma_1$, $1/2<\sigma_1<1$, здесь необходимо условие (2).

Примечания. 1. Это доказательство более громоздко, чем доказательство теоремы 1, но значительно проще доказательства этой теоремы переносом контура на $\sigma = 1$, которое только намечено, но почти не приведено в работе [3, лемма 1, доказательство леммы 6а].

2. Введение условия (1) вместо условия (2) существенно упрощает доказательство оценки сверху для простых чисел арифметической прогрессии в работе [3, теорема 1].

3. Ранее К. Исеки [4, лемма 6] получил асимптотику для $\sum\limits_{n \le z,\ (n,k)=1} \varphi^{-1}(n),\ k \le z$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ингам А. Е.* Распределение простых чисел. М.; Л., 1936.
2. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М., 1967.
3. *Климов Н.И.* Малое решето // Матем. заметки. 1980. Т. 27, вып. 2. С. 161 - 174.
4. *Iseki K.*A Divisor Problem involving Prime Numbers // Japanese J. of Mathematics. 1951. Vol. 21. P. 67 - 92.

УДК 517.928

И. И. Ефремов

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНДЕФИНИТНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Введение. Пусть на отрезке $[0,1]$ задан линейный квазидифференциальный (к.д.) оператор L, определяемый к.д. выражением

$$D_n y = y^{[n]}, \tag{1}$$

где

$$D_k y = y^{[k]} = i\frac{d}{dx} y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj} y^{[j]}, \qquad k = n, n-1, \dots, 1,$$

$$D_0 y = y^{[0]} = y, \qquad p_{kj} \in L[0,1]$$

и линейно-независимыми нормированными [1, с. 65] краевыми условиями

$$U_\nu(y) = U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0, \quad \nu = 1,2,\dots n, \tag{2}$$

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y^{[k_\nu]}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y^{[j]}(0),$$