контура на $\sigma=1$, которое только намечено, но почти не приведено в работе [3, лемма 1, доказательство леммы 6а].

2. Введение условия (1) вместо условия (2) существенно упрощает доказательство оценки сверху для простых чисел арифметической прогрессии в работе [3, теорема 1].

3. Ранее К. Исеки [4, лемма 6] получил асимптотику для $\sum\limits_{n\le z,\ (n,k)=1}\varphi^{-1}(n),\ k\le z$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ингам А. Е.* Распределение простых чисел. М.; Л., 1936.
2. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М., 1967.
3. *Климов Н.И.* Малое решето // Матем. заметки. 1980. Т. 27, вып. 2. С. 161 - 174.
4. *Iseki K.*A Divisor Problem involving Prime Numbers // Japanese J. of Mathematics. 1951. Vol. 21. P. 67 - 92.

УДК 517.928

И. И. Ефремов

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНДЕФИНИТНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Введение. Пусть на отрезке $[0,1]$ задан линейный квазидифференциальный (к.д.) оператор L, определяемый к.д. выражением

$$D_n y = y^{[n]}, \tag{1}$$

где

$$D_k y = y^{[k]} = i\frac{d}{dx}y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}y^{[j]}, \qquad k=n,n-1,\dots,1,$$

$$D_0 y = y^{[0]} = y, \qquad p_{kj}\in L[0,1]$$

и линейно-независимыми нормированными [1, с. 65] краевыми условиями

$$U_\nu(y) = U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0, \quad \nu = 1,2,\dots n, \tag{2}$$

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y^{[k_\nu]}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1}\alpha_{\nu j}y^{[j]}(0),$$

$$U_{\nu 1}(y)=\beta_\nu y^{[k_\nu]}(1)+\sum_{j=0}^{k_\nu -1}\beta_{\nu j}y^{[j]}(1),$$

где $\alpha_{\nu j},\beta_{\nu j}\in C$, $|\alpha_\nu|+|\beta_\nu|>0$ для $1\le \nu\le n$, $n-1\ge k_1\ge k_2\ge\dots\ge k_n\ge 0$, $k_{\nu+2}<k_\nu$ для $1\le\nu\le n-2$.

Рассмотрим задачу о собственных значениях (с.з.) оператора L с весовой ступенчатой функцией $r(x)$ в виде:

$$Ly=\lambda r(x)y, \tag{3}$$

где $r:[0,1]\to C\setminus\{0\}$ - ступенчатая функция, $r(x)=r_k$, если $x\in I_k$, $k=0,1,\dots,m$, $I_0=[a_0=0,a_1]$, $I_k=(a_k,a_{k+1}]$ для $k\ne 0$, $a_0=0<a_1<a_2<\dots<a_{m+1}=1$.

К.д. выражение $D_n y=y^{[n]}$ является обобщением линейного дифференциального выражения n-го порядка [1, с. 13]:

$$l(y)=y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\dots+p_ny. \tag{4}$$

Задачи о собственных значениях линейных дифференциальных операторов с весовой функцией $r(x)$ были предметом многочисленных исследований Лангера (см., например, [2]) и других авторов. В этих исследованиях $r(x)$ предполагалась достаточно гладкой функцией, а дифференциальное выражение $l(y)$ имело специальный вид. W. Eberhard, G. Freiling, A. Schneider в [3] рассмотрели задачу о собственных значениях линейных дифференциальных операторов со ступенчатой весовой функцией $r(x)$ в наиболее общем виде. При этом предполагалось, что $r(x)$ принимает только действительные значения, коэффициент $p_1(x)$ в (4) либо равняется тождественно 0, либо является достаточно гладкой функцией, а краевые условия удовлетворяют определенным требованиям, называемым условиями регулярности.

В этой статье будет одно определение регулярности задачи (3), которое обобщает определение регулярности, данное в [3] на случай к.д. операторов и комплекснозначной функции $r(x)$ для $n=2\mu$. При этом при определенном расположении ступенек $r(x)$ получены более точные асимптотические формулы для с.з. задачи (3) по сравнению с [3]. При этом мы будем только предполагать, что $p_{k\,k-1}\in L[0,1]$, а это соответствует случаю, когда $p_1\in L[0,1]$. Пусть далее для определенности $n=2\mu$.

2. Условия регулярности. Обозначим $R(x)=(-1)^{n+1}i^n r(x)$, $\lambda=\rho^n$. Пусть

$$R_k=(-1)^{n+1}i^n r_k=|R_k|e^{i\varphi_k},$$

где $\quad 0\le\varphi_k<2\pi$, $k=\overline{0,m}$, $S_\nu(R_k)=\left\{\rho\in C\left|\frac{\nu\pi}{n}-\frac{\varphi_k}{n}\le\arg\rho\le\frac{(\nu+1)\pi}{n}-\frac{\varphi_k}{n}\right.\right\}$.

Для каждого R_k разобьем всю комплексную ρ-плоскость на $2n$ секторов. Рассмотрим всевозможные пересечения $(m+1)$ секторов $S_{\nu_0}(R_0)\cap\ldots\cap S_{\nu_m}(R_m)$, где $\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_m=0,\ldots,2n-1$, тогда комплексная ρ-плоскость будет разбита на не более, чем $N=(m+1)2n$ секторов. Пусть S один из таких секторов. В каждом S-секторе можно занумеровать корни n-й степени $\{w_{kj}\}_{j=1,\ldots,n}$ из $(-R_k)$ таким образом, что $\mathrm{Re}\rho w_{k1}\le\ldots\le\mathrm{Re}\rho w_{kn}$, $k=0,1,\ldots,m$, $\rho\in S$. Положим

$$\Theta(x_1,\ldots,x_\sigma;x_{\sigma+1},\ldots x_n)=\begin{vmatrix}\alpha_1x_1^{k_1} & \ldots\alpha_1x_\sigma^{k_1} & \beta_1x_{\sigma+1}^{k_1} & \ldots\beta_1x_n^{k_1}\\ \alpha_2x_1^{k_2} & \ldots\alpha_2x_\sigma^{k_2} & \beta_2x_{\sigma+1}^{k_2} & \ldots\beta_2x_n^{k_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_nx_1^{k_n} & \ldots\alpha_nx_\sigma^{k_n} & \beta_nx_{\sigma+1}^{k_n} & \ldots\beta_nx_n^{k_n}\end{vmatrix}.$$

Определение. Будем говорить, что оператор L порожден регулярными краевыми условиями (2), если в любом S-секторе определители

$$\Theta(iw_{01},\ldots,iw_{0\mu};iw_{m\mu+1},\ldots,iw_{mn}),$$
$$\Theta(iw_{01},\ldots,iw_{0\mu-1},iw_{0\mu+1};iw_{m\mu+1},\ldots,iw_{mn}),$$
$$\Theta(iw_{01},\ldots,iw_{0\mu};iw_{m\mu};iw_{m\mu+2},\ldots,iw_{mn})$$

отличны от 0.

В этом случае имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $n=2\mu$, $\arg r_i-\arg r_j\ne0$ если $i\ne j$, $0\le\arg r_i,\arg r_j<2\pi$, тогда регулярная задача (3) будет иметь $2(m+1)$ последовательностей собственных значений

$$\lambda_k^l=(\rho_k^l)^n,\ \widetilde{\lambda}_k^l=(\widetilde{\rho}_k^l)^n,\ l=0,\ldots,m,\ k=N,N+1,\ldots$$
$$\rho_k^l=\pi k i a_l+A_l+h_k^l, \tag{5}$$
$$\widetilde{\rho}_k^l=\pi k i b_l+B_l+\widetilde{h}_k^l, \tag{6}$$

где a_l, b_l, A_l, B_l - некоторые комплексные константы, а $h_k^l=o(1)$, $\widetilde{h}_k^l=o(1)$, $k\to\infty$.

Если $p_{k\,k-1}\in L^2[0,1]$, $k=1,\ldots,n$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}|h_k^l|^2<\infty,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|\widetilde{h}_k^l|^2<\infty. \tag{7}$$

Замечание. Если $\arg r_i=\arg r_j$ для некоторых i,j, то можно получить оценки для ρ_k^l в виде $\rho_k^l=\pi k i\{c_l+O(\frac{1}{k})\}$, где c_l некоторая комплексная константа, $l = 1,\dots,p$, а p некоторое целое число. Аналогичные формулы можно получить для нечетного n. При получении оценки (7) используется лемма, обобщающая известную лемму Кесельмана, полученная в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.

2. *Langer R.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 545 - 582.

3. *Eberhard W., Freiling G., Schneider A.* // Differential and Integral Equations. 1990. Vol. 3, November. P. 1167 - 1179.

4. *Рыхлов В.С.* Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов :Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1981.

УДК 517.984.36

М. Ю. Игнатьев

ЛИНЕЙНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЬЮ[1]

Пусть D - область на комплексной плоскости, звездная относительно 0, $A(D)$ - пространство функций, аналитических в области D, с топологией равномерной сходимости на компактах, $A_k(D) = \{z^k f(z), f \in A(D)\}$, $k \in \mathbf{N}$. Пусть $\gamma \in (0, \pi/2)$. Будем говорить, что звездная относительно 0 область D удовлетворяет условию $R(\gamma)$, если $z \in D \Rightarrow \{z \exp(\pm it - t\,\mathrm{ctg}\gamma)\}_{t \in (0,+\infty)} \subset D$. Отметим, что, если $\gamma_1 > \gamma_2$, то область, удовлетворяющая условию $R(\gamma_1)$, удовлетворяет также условию $R(\gamma_2)$.

Введем в рассмотрение следующую полугруппу операторов дробного интегродифференцирования, построенную на основе оператора Чезаро I:

$$I^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \ln^{\alpha-1}(1/\tau) f(z\tau)\,d\tau, \ \alpha > 0; \tag{1}$$

$$I^{-1} f(z) = \frac{d}{dz}(zf(z)); \ I^\alpha = I^{[\alpha]} I^{\alpha-[\alpha]}, \ \alpha < 0. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Саратовского международного центра перспективных исследований, грант № 99-1-01.