станта, $l = 1,\dots,p$, а p некоторое целое число. Аналогичные формулы можно получить для нечетного n. При получении оценки (7) используется лемма, обобщающая известную лемму Кесельмана, полученная в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.

2. *Langer R.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 545 - 582.

3. *Eberhard W., Freiling G., Schneider A.* // Differential and Integral Equations. 1990. Vol. 3, November. P. 1167 - 1179.

4. *Рыхлов B.C.* Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов :Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1981.

УДК 517.984.36

М. Ю. Игнатьев

ЛИНЕЙНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЬЮ[1]

Пусть D - область на комплексной плоскости, звездная относительно 0, $A(D)$ - пространство функций, аналитических в области D, с топологией равномерной сходимости на компактах, $A_k(D) = \{z^k f(z), f \in A(D)\}$, $k \in \mathbf{N}$. Пусть $\gamma \in (0, \pi/2)$. Будем говорить, что звездная относительно 0 область D удовлетворяет условию $R(\gamma)$, если $z \in D \Rightarrow \{z \exp(\pm it - t\,\mathrm{ctg}\gamma)\}_{t \in (0,+\infty)} \subset D$. Отметим, что, если $\gamma_1 > \gamma_2$, то область, удовлетворяющая условию $R(\gamma_1)$, удовлетворяет также условию $R(\gamma_2)$.

Введем в рассмотрение следующую полугруппу операторов дробного интегродифференцирования, построенную на основе оператора Чезаро I:

$$I^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \ln^{\alpha-1}(1/\tau) f(z\tau)\,d\tau,\ \alpha > 0; \tag{1}$$

$$I^{-1} f(z) = \frac{d}{dz}(zf(z));\ I^\alpha = I^{[\alpha]} I^{\alpha-[\alpha]},\ \alpha < 0. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Саратовского международного центра перспективных исследований, грант № 99-1-01.

Рассмотрим следующий интегро-дифференциальный оператор дробного порядка $\alpha > 2$:

$$L = I^{-\alpha}(E + H) + I^{-\alpha+1}Q, \tag{3}$$

$$Hf(z) = \int_0^1 H(\tau) f(z\tau) d\tau, \tag{4}$$

$$Qf(z) = \int_0^1 Q(z,\tau) f(z\tau) d\tau. \tag{5}$$

Основной результат работы – следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 2$, область D удовлетворяет условию $R(\gamma)$ для некоторого $\pi/2 - \pi/\alpha < \gamma < \pi/2$. Пусть L- оператор вида (3) - (5), где функция $Q(z,t)$- аналитическая по z при любом фиксированном t, и для некоторого $p > 1$ принадлежит как функция t пространству $L_p[0,1]$ при каждом фиксированном $z \in D$, и для любого компакта $K \subset D$

$$\sup_{z \in K} \| Q(z,t) \|_{L_p[0,1]} < \infty. \tag{6}$$

Пусть $H(t) = H_1(\ln(1/t))$, $H_1(t)$ аналитична в области $S_\alpha = \{t : |\arg t| < \pi/2 + \pi/\alpha\}$, *и*:

$$| H_1(t) | < C |t|^{\varepsilon-1} \exp(\mu_j |t|) \ \ \forall t \in S_\alpha, \tag{7}$$

где $\varepsilon > 0, \mu_0 \in [0,1), \mu_1 \geq 0, \psi_0 \in [0, \pi/2)$, $j = 0$ если $|\arg t| \leq \psi_0$, $j = 1$ если $\psi_0 < |\arg t| < \pi/2 + \pi/\alpha$.

Тогда существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что для любой звездной относительно 0 области $D' \subseteq D$ оператор L линейно эквивалентен в $A_n(D')$ оператору L_1:

$$L_1 = I^{-\alpha}(E + H + IQ_1), \tag{8}$$

где

$$Q_1 f(z) = \int_0^1 Q(0,t) f(zt) dt. \tag{9}$$

Если, кроме того, все собственные значения оператора L_1 (8), (9) различны, то операторы L и L_1 линейно эквивалентны в $A(D')$.

При получении теоремы 1 используется развитие метода, предложенного и развивавшегося ранее в работах В.А. Марченко, Л.А. Сахновича, А.П. Хромова, И.Г. Хачатряна, О.В. Седина, В.В. Рындиной, М.С. Еремина. Отметим преемственность полученных результатов с результатами работ [1, 2], посвященных изучению вопросов линейной эквивалентности дифференциальных операторов целых порядков с особенностью, обобщающих классический оператор Эйлера, а также интегро-дифференциальных операторов целого порядка вида:

$$Ly = z^n y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} q_j(z) z^j y^{(j)} + \int_0^z P(z,t) y(t) dt. \tag{10}$$

Одним из возможных приложений теоремы 1 является изучение поведения рядов по собственным функциям оператора L.

Будем предполагать для определенности, что функция $Q(z,t)$ - целая по переменной z, и все собственные значения оператора L_1 различны. В этом случае для каждого $k \in \mathbf{N}$ существует единственная собственная функция $y(z,k)$ оператора L, представимая в виде $y(z,k) = z^{k-1} + z^k \varphi(z,k)$, $\varphi(z,k) \in A(D)$, причем любая собственная функция оператора L совпадает с точностью до постоянного множителя с одной из функций $y(z,k)$.

Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}, \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k y(z,k), \tag{12}$$

с одной и той же последовательностью коэффициентов $\{a_k\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, где область D совпадает со всей комплексной плоскостью. Пусть все собственные значения оператора L_1 различны. Пусть, кроме того, радиус сходимости ряда (11) отличен от 0. Тогда

1. Ряд (12) сходится в $A(K)$, где K - круг сходимости ряда (11).

2. Обозначим через $f(z)$ и $g(z)$ функции, представляемые в окрестности 0 рядами (11) и (12) соответственно, через D_f и D_g звезды Миттаг-Леффлера функций $f(z)$ и $g(z)$. Тогда $D_f = D_g$ и $g_\delta(z) \to g(z) \delta \to +0$ в $A(D_g)$, где $g_\delta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+(k-1)\delta)} y(z,k)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рындина В.В.* Об эквивалентности дифференциального оператора *n*-го порядка с регулярной особой точкой и оператора Эйлера в пространстве A(G) // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 3. С. 674 - 678.

2. *Еремин М.С.* Оператор преобразования в звездообразной области решений некоторых интегро-дифференциальных уравнений высших порядков. Минск, 1990. 49 с. Деп. в ВИНИТИ 07.05.90, № 2381 - В90.