УДК 517.91

В. В. Корнев

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КВАТЕРНИОНАХ[1]

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\underline{x}} + \underline{p}\dot{\underline{x}} + \underline{q}\underline{x} = 0, \tag{1}$$

где $\underline{x}(t)$ - неизвестная функция вещественного переменного t, значениями которой являются кватернионы $\underline{x} = x_0 + \underline{i}x_1 + \underline{j}x_2 + \underline{k}x_3$; $\underline{p}, \underline{q}$ - заданные квтернионы.

Для нахождения решений (1) можно применить классический метод Эйлера [1], согласно которому частные решения ищутся в виде $\underline{x}(t) = e^{\underline{\lambda}t}$. Кватернионная экспонента $e^{\underline{\lambda}t}$, определяемая рядом $e^{\underline{\lambda}t} = 1 + \underline{\lambda}t + ... + \frac{1}{n!}(\underline{\lambda}t)^n + ...,$ обладает теми же свойствами, что и обычная экспонента: $e^{\underline{\lambda}t} \neq 0, \frac{de^{\underline{\lambda}t}}{dt} = \underline{\lambda}e^{\underline{\lambda}t}$, $\frac{d^2e^{\underline{\lambda}t}}{dt^2} = \underline{\lambda}^2e^{\underline{\lambda}t}$. При подстановке $\underline{x}(t) = e^{\underline{\lambda}t}$ в уравнение (1) получается кватернионный аналог характеристического уравнения

$$\underline{\lambda}^2 + \underline{p}\underline{\lambda} + \underline{q} = 0. \tag{2}$$

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (2) всегда имеет решение, и число различных решений не может быть больше двух.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 заключается в иссследовании системы из четырех скалярных нелинейных уравнений, эквивалентной уравнению (2). В практическом плане нахождение решений уравнения (2) в общем случае сводится к нахождению единственного положительного корня скалярного кубического уравнения.

ТЕОРЕМА 2. Если уравнение (2) имеет два различных корня $\underline{\lambda}_1$ и $\underline{\lambda}_2$, то общее решение (1) имеет вид

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\lambda}_1}\underline{c}_1 + e^{\underline{\lambda}_2}\underline{c}_2, \tag{3}$$

где $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ - произвольные кватернионы.

Если $\underline{\lambda}$ - единственный корень характеристического уравнения (2), то общее решение определяется формулой

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\lambda} t}\left(\underline{c}_1 + \int_0^t e^{-\underline{\lambda}\tau} e^{-(\underline{\lambda} + \underline{p})\tau} d\tau \cdot \underline{c}_2\right). \tag{4}$$

Замечание. Интеграл в (4) вычисляется в явном виде и представляет собой линейную комбинацию функций вида $e^{\alpha t}\sin\beta t$, $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}t\sin\beta t$ и $e^{\alpha t}t\cos\beta t$ (α, β - вещественные числа, выражаемые через компоненты кватернионов $\underline{p}$ и $\underline{q}$). Важно отметить, что под интегралом в формуле (4) нельзя складывать показатели степеней, так как произведение кватернионов не коммутативно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плотников П.К., Сергеев А.Н., Челноков Ю.Н.* Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. Инж. журн. Механика твердого тела. 1991. № 5. С. 9 - 18.

УДК 517.984

К. В. Кравченко

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА[1]

Введение

Обратная задача спектрального анализа заключается в определении операторов по некоторым их спектральным характеристикам и играет важную роль в различных областях естествознания. Наиболее полные результаты в теории обратных задач известны для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля с двухточечными краевыми условиями [1, 2]. Известно, в частности, что задание спектральной функции или, что то же самое, функции Вейля однозначно определяет оператор. Основным инструментом исследования при этом являлся оператор преобразования.

В настоящей работе изучаются дифференциальные операторы с нелокальными краевыми условиями. Прямые задачи спектральной теории для таких операторов достаточно полно исследованы [3, 4]. В теории же обратных задач автору известна лишь работа [5]. Как следует из Контрпримера 1, в случае нелокальных краевых условий задания функции Вейля уже недостаточно для однозначного определения потенциала. Таким образом, открытым является даже вопрос о постановке обратной задачи. Кроме того, для иссле-

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Саратовского Международного Центра Перспективных Исследований, грант № 99-1-01.