Теорема 2. *Если $x^* \in intD$ – решение задачи (1), то*

$$\rho_\Omega(x^*)\underline{\partial R}(x^*) \cap R(x^*)\overline{\partial\rho_\Omega}(x^*) \neq \varnothing. \tag{5}$$

Доказательство. В соответствии с условием минимума субдифференцируемой функции для $x^* \in intD$ ([3, с. 239]) должно выполняться $0_p \in \underline{\partial\varphi_1}(x^*)$, что в соответствии с формулой (3) эквивалентно

$$0_p \in \big(\rho_\Omega(x^*)\underline{\partial R}(x^*) - R(x^*)\overline{\partial\rho_\Omega}(x^*)\big)$$

или соотношению (5).

Теорема 3. *Если точка $x^* \in D$ является решением задачи (2), то*

$$\Big[R^{p-1}(x^*)\underline{\partial R}(x^*) - \rho_\Omega^{p-1}(x^*)\overline{\partial\rho_\Omega}(x^*)\Big] \cap K^+(x^*, D) \neq \varnothing, \tag{6}$$

где $K^+(x^*, D)$ – сопряженный конус к конусу возможных направлений множества D в точке x.

Доказательство. В соответствии с условием минимума субдифференцируемой функции на заданном выпуклом множестве [3, с. 239] должно выполняться соотношение $\underline{\partial\varphi_2}(x^*) \cap K^+(x^*, D) \neq \varnothing$, которое, учитывая формулу (4), эквивалентно (6).

Замечание. Формулы субдифференциала функции $R(x)$ и субдифференциала функции $\rho_\Omega(x)$, в которых отражается зависимость от нормы и множества D имеются в [2]. Это придает соотношениям (5) и (6) конструктивный вид и позволяет решать конкретные задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Боннезен Т. Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: ФАЗИС, 2002.

2. *Дудов С. И. Златорунская И.В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы //Мат.сб. 2000, Т. 191, №10. С. 13-38.

3. *Демьянов В. Ф. Рубинов А.М.* Основы выпуклого анализа и квазидифференциального исчисления. М.: Наука, 1990.

УДК 519.4

В.А. Молчанов

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛОГИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЯЗЫКОВ

В настоящей статье продолжается исследование языков произвольных слов, начало которому было положено в [1]. Рассматривается конечный алфавит A и следующие множества слов: $W_{fin}(A)$ – множество всех конечных слов, $W^{\rightarrow}(A)$ – множество всех бесконечных вправо слов, $W^{\leftarrow}(A)$ – множество всех бесконечных влево слов, $W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество всех бесконечных в обе стороны слов и $W(A) = W_{fin}(A) \cup W^{\to}(A) \cup W^{\leftarrow}(A) \cup W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество всех слов над алфавитом A. Подмножества $W(A)$ называются языками произвольных слов над алфавитом A.

В работе [2] показано, что класс $\mathrm{Rec}_S(A)$ распознаваемых полугруппами языков произвольных слов над алфавитом A состоит из конечных объединений множеств вида $X, X^{-\omega}Y, XY^{+\omega}, X^{-\omega}YZ^{+\omega}$, где X, Y, Z – рациональные языки над алфавитом A и $X^{+\omega} = \{u_1u_2\ldots \ : \ u_1, u_2, \dots \in X\ \}$, $X^{-\omega} = \{\ldots u_{-2}u_{-1} : \ u_{-1}, u_{-2}, \dots \in X\ \}$. В работе [3] показано, что класс $\mathrm{Rec}_S(A)$ содержится в классе $\mathrm{Rec}_L(A)$ всех таких языков произвольных слов, которые определяются формулами языка $\mathcal{L}$ монадической логики 2-го порядка сигнатуры $\Omega = \{<, (R_a)_{a\in A}\}$, состоящей из одного символа бинарного предиката $<$ и семейства символов унарных предикатов R_a $(a \in A)$. Целью настоящей работы является доказательство обратного включения $\mathrm{Rec}_L(A) \subset \mathrm{Rec}_S(A)$.

Для языка $L \subset W(A)$ и пустого слова Λ положим: $L_{fin} = L \cap W_{fin}(A)$, $L^{\to} = L \cap W^{\to}(A)$, $L^{\leftarrow} = L \cap W^{\leftarrow}(A)$, $L^{\leftrightarrow} = L \cap W^{\leftrightarrow}(A)$, $L_{inf} = L^{\to} \cup L^{\leftarrow} \cup L^{\leftrightarrow}$, $L^{\to}_{fin} = L_{fin} \cup L^{\to} \cup \{\Lambda\}$, $L^{\leftarrow}_{fin} = L_{fin} \cup L^{\leftarrow} \cup \{\Lambda\}$. Согласно [1], рациональными операциями на множестве подмножеств $W(A)$ являются тернарное произведение [...] и бесконечная степень $^{\infty}$, которые определяются следующим образом: $[K, L, M] = K^{\leftarrow}_{fin} L_{fin} M^{\to}_{fin}$, $L^{\infty} = L^{+}_{fin} \cup L^{+\omega}_{fin} \cup L^{-\omega}_{fin} \cup L^{\omega}_{fin}$, где $L^{+}_{fin} = \{u_1 \ldots u_n : n \in \mathbb{N} \text{ и } u_1, \ldots, u_n \in L_{fin}\}$, $L^{\omega}_{fin} = \{\ldots u_{-1}u_0u_1 \cdots : u_n \in L_{fin} \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}\}$.

Лемма 1. *В результате применения к рациональным языкам над алфавитом A рациональных и булевых операций получаются языки из класса $\mathrm{Rec}_S(A)$.*

Согласно [3], для каждого слова $w \in W(A)$ (рассматриваемого как отображение некоторого отрезка множества $\mathbb{Z}$ в алфавит A) определяется алгебраическая Ω-система $M_w = (\mathbb{Z}, <, (R_a)_{a\in A})$, где $<$ – отношение сравнения целых чисел и $R_a = \overset{-1}{w}(a)$ $(a \in A)$. При этом слово w удовлетворяет формуле Φ языка $\mathcal{L}$, если $M_w \models \Phi$. Множество всех слов $w \in W(A)$, удовлетворяющих формуле Φ, называется спектром формулы Φ и обозначается $S(\Phi)$.

Пусть $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_p, X_1, \ldots, X_q)$ – формула языка $\mathcal{L}$, содержащая предметные переменные $x_1, \ldots, x_p$ и унарные предикатные переменные $X_1, \ldots, X_q$, значения которых в модели M_w представляются с помощью интерпретации $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, где θ_1 отображает предметные переменные в элементы множества M и θ_2 отображает унарные предикатные переменные в подмножества множества M.

По аналогии с изложенным в работе [4] методом доказательства эквивалентности автоматов Буши и языка монадической логики 2-го порядка условие $M_w \models_\theta \Phi$ можно естественно описать с помощью нового алфавита $B = A \times \{0,1\}^{2m}$, элементами которого являются упорядоченные наборы $b = (a, k_1, \ldots, k_{2m})$ для некоторого фиксированного натурального числа $m \geq \max\{p, q\}$. В этом случае компонента a называется носителем слова b и обозначается $a = \pi_0(b)$, а остальные компоненты $k_1, \ldots, k_{2m}$ слова b называются его маркировками и обозначаются $k_i = \pi_i(b)$ для всех $i = \overline{1, 2m}$. В результате каждому маркированному слову $\overline{w} \in W(B)$ соответствует однозначно определенное слово $w = \pi_0(\overline{w})$ над алфавитом A и $2m$ двоичных слов $w_i = \pi_i(\overline{w})$ $(i = \overline{1, 2m})$. Тогда условие $M_w \models_\theta \Phi$ можно описать с помощью однозначно определенного маркированного слова $\overline{w}_\theta \in W(B)$, удовлетворяющего условиям: (1) $\pi_0(\overline{w}_\theta) = w$, (2) для каждого $i = \overline{1, m}$ значение $\theta_1(x_i) = n$ в том и только том случае, если соответствующая i-ая маркировка n-ой буквы слова $\overline{w}_\theta$ равна 1, (3) для каждого $j = \overline{1, m}$ интерпретация $\theta_2(X_j)$ состоит из номеров всех таких букв слова $\overline{w}_\theta$, у которых $(m + j)$-ая маркировка равна 1. Маркированные слова над алфавитом B будем называть допустимыми, если соответствующие им двоичные слова w_i при всех $i = \overline{1, m}$ содержат точно одну 1. Множество всех допустимых слов над алфавитом B обозначим D.

Рассмотрим следующие множества маркированных букв: $C_i = \{b \in B : \pi_i(b) = 1\}$, $C_{i,a} = \{b \in B : \pi_0(b) = a \wedge \pi_i(b) = 1\}$, $C_{i,k} = \{b \in B : \pi_i(b) = 1 \wedge \pi_k(b) = 1\}$, где $1 \leq i, k \leq 2m$ и $a \in A$. Легко видеть, что множество D представляется в виде: $D = \bigcap_{1 \leq i \leq m} ([B^\infty, C_i, B^\infty] \backslash [B^\infty, C_i B^* C_i, B^\infty])$ и, значит, принадлежат классу языков $\mathrm{Rec}_S(B)$.

Таким образом, для формулы Φ над алфавитом B однозначно определяется маркированный спектр $\overline{S}_B(\Phi)$, состоящий из всех таких маркированных слов $\overline{w}_\theta \in W(B)$, что $M_w \models_\theta \Phi$ для некоторой интерпретации θ. Ясно, что при описанном подходе маркированный спектр атомарной формулы $R_a(x_i)$ будет состоять из допустимых слов, у которых на месте $\theta_1(x_i)$ стоит буква с носителем a, маркированный спектр атомарной формулы $x_i < x_k$ будет состоять из допустимых слов, у которых номер буквы с i-ой маркировкой 1 меньше номера буквы с k-ой маркировкой 1, маркированный спектр атомарной формулы $x_i = x_k$ будет состоять из допустимых слов, у которых номер буквы с i-ой маркировкой 1 равен номеру буквы с k-ой маркировкой 1, и маркированный спектр атомарной формулы $X_j(x_i)$ будет состоять из допустимых слов, у которых буквы с i-ой маркировкой 1 имеют также $(m+j)$-ую маркировку 1.

Лемма 2. *Маркированные спектры атомарных формул представляются в виде:*

$$\overline{S}_B(R_a(x_i)) = D \cap [B^\infty, C_{i,a}, B^\infty],\ \overline{S}_B(x_i < x_k) = D \cap [B^\infty, C_i B^* C_k, B^\infty],$$
$$\overline{S}_B(x_i = x_k) = D \cap [B^\infty, C_{i,k}, B^\infty],\ \overline{S}_B(X_j(x_i)) = D \cap [B^\infty, C_{i,m+j}, B^\infty],$$

и, значит, принадлежат классу языков $\mathrm{Rec}_S(B)$.

Для каждого $i = \overline{1,2m}$ обозначим π_{-i} отображение множества B на множество $B' = A \times \{0,1\}^{p+q-1}$, которое в маркированных буквах $b = (a, k_1, \ldots, k_{2m})$ из множества B удаляет i-ую маркировку, т.е. $\pi_{-i}(b) = (a, k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_{2m})$.

Лемма 3. *Для любых формул* Φ, Ψ *языка* $\mathcal{L}$ *и значений* $1 \leq i, j \leq m$ *выполняются равенства:* $\overline{S}_B(\Phi \wedge \Psi) = \overline{S}_B(\Phi) \cap \overline{S}_B(\Psi)$, $\overline{S}_B(\Phi \vee \Psi) = \overline{S}_B(\Phi) \cup \overline{S}_B(\Psi)$, $\overline{S}_B(\neg\Phi) = D \setminus \overline{S}_B(\Phi)$, $\pi_{-i}(\overline{S}_B(\Phi)) = \overline{S}_{B'}((\exists x_i)\Phi)$, $\pi_{-(m+j)}(\overline{S}_B(\Phi)) = \overline{S}_{B'}((\exists X_j)\Phi)$.

Теорема. *Для любого предложения* Φ *языка* $\mathcal{L}$ *спектр* $S(\Phi)$ *принадлежит классу языков* $\mathrm{Rec}_S(A)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Molchanov V.A.* Nonstandard approach to general rational languages // Contributions to General Algebra. 2001. V. 13. P. 233-244.

2. *Молчанов В.А.* О распознавании языков полугруппами и автоматами // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2006. Вып. 8. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. С. 83-86.

3. *Молчанов В.А.* О логической определяемости языков на конечных автоматах // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2007. Вып. 9. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. С. 83-86.

4. *Büchi J.R.* Weak second-order arithmetic and finite automata // Z. Math. Logik and Grundl. Math. 1960. V. 6. P. 66-92.

УДК 519.4

В.Е. Новиков

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В ФОРМАЛЬНОМ КОНТЕКСТЕ

Статья продолжает исследование связи между структурой формальных концептов и структурой функциональных зависимостей [1] на n-арном отношении, которые были начаты в [2].

Восстановим основные определения концептуального анализа [3], используя аппарат алгебры отношений В.В. Вагнера [4] на контексте с n-арным отношением. Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ – n-арное отношение, где $\bar{n} := (1, 2, \ldots, n)$, $M_{\bar{n}} := M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, $\bar{\imath}_1 = i_1$ и $\bar{\imath}_k := (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $x_{\bar{\imath}_k} := (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$, $M_{\bar{\imath}_k} := M_{i_1} \times M_{i_2} \times \cdots \times M_{i_k}$ для произвольных $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, при этом также обозначаем $\bar{\imath}_k \subseteq \bar{n}$. Говорим, что k-система $x_{\bar{\imath}_k}$ *входит в отношение* ρ, если существует n-система $x_{\bar{n}} \in \rho$, для которой элементы $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ являются её соответствующими компонентами. Для $\bar{\imath}_s, \bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$, $a_{\bar{\imath}_s} \in M_{\bar{\imath}_s}$, $X \subseteq M_{\bar{\imath}_s}$ обозначим:

$$\pi_{\bar{\jmath}_k}(\rho) := \{y_{\bar{\jmath}_k} \in M_{\bar{\jmath}_k} \mid y_{\bar{\jmath}_k} \text{входит в } \rho\};$$

$$\sigma_{\{a_{\bar{\imath}_s}\}}(\rho) := \{x_{\bar{n}} \in \rho \mid \ a_{\bar{\imath}_s} \subseteq x_{\bar{n}}\};\ \rho_{\bar{\jmath}_k}\langle x_{\bar{\imath}_s}\rangle := \pi_{\bar{\jmath}_k}(\sigma_{\{x_{\bar{\imath}_s}\}}(\rho));$$