$$\sum_{l=1}^{\infty} \xi_l \, l^{n-1} < +\infty;$$

2) (условие P) при каждом фиксированном $x \in (0,T]$ и $\delta > 0$ линейный ограниченный оператор $E + \widetilde{H}_\delta(x)$, действующий из m в m, имеет ограниченный обратный, где m - пространство ограниченных последовательностей;

3) $\varepsilon_j^{(\nu)}(x), \nu = \overline{0, j-1}$, абсолютно непрерывны на $[\alpha, T]$ для любого $\alpha > 0$, и $\varepsilon_j^{(\nu)}(x) x^{\vartheta_{\nu j}} \in L(0,T), \nu = \overline{0, j}$, где функции $\varepsilon_j(x)$ строятся по формулам (2) - (5), а $\varphi(x) = J^{-1} W_{T/2}(x) \left(E + \widetilde{H}_{T/2}(x)\right)^{-1} \widetilde{\psi}_{T/2}(x)$.

УДК 517.948.35

В. П. Курдюмов

БАЗИСНОСТЬ РИССА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ РАЗРЫВЫ НА ЛИНИЯХ $t = x$ и $t = 1 - x$ [1]

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^1 A(x,t) f(t) dt, \quad x \in [0,1]. \tag{1}$$

Предполагается, что A^{-1} существует и

$$A(x,t) = \alpha_1 A_1(x,t)\varepsilon(x,t) + \alpha_2 A_2(x,t)\varepsilon(t,x) +$$
$$+ \alpha_3 A_3(1-x,t)\varepsilon(1-x,t) + \alpha_4 A_4(1-x,t)\varepsilon(t,1-x),$$

где $\varepsilon(x,t) = 1$ при $x \geq t$ и $\varepsilon(x,t) = 0$ при $x < t$. Также предполагается, что $A_i(x,t) = 1 + B_i(x,t), B_i(x,t)$ непрерывны вместе со своими частными производным по x, по t и второй смешанной производной;

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} B_i(x,t)|_{t=x} = 0; \quad i = \overline{1,4}; \quad k = 0,1; \quad \delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \neq 0$$

Таким образом, ядро $A(x,t)$ является гладким всюду, кроме линий $t = x$ и $t = 1 - x$, а на последних $A(x,t)$ допускает разрывы первого рода.

Проблемами обращения операторов вида (1), исследованию конечномерных возмущений таких операторов, равносходимости разложений по корневым векторам и в обычный тригонометрический ряд посвящены работы А.П. Хромова [1 - 3]. Исследованию базисности Рисса корневых векторов не-

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.

которых частных случаев операторов вида (1) посвящены работы автора [4, 5]. Для интегральных операторов с ядрами, имеющими разрыв производной некоторого порядка лишь на диагонали $t = x$, такие исследования уже произведены, например, в работах автора [6, 7].

Обозначим

$$\gamma_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)\delta^{-1}, \gamma_2 = (\alpha_3 - \alpha_4)\delta^{-1},$$

$$a = 1 + \gamma_1 A(0,+0) + \gamma_2 A(0,1-0) + \int_0^1 A(0,t)R(t,0)dt,$$

$$b = -\gamma_1 A(0,1-0) - \gamma_2 A(0,+0) - \int_0^1 A(0,t)R(t,1)dt,$$

где $R(x,t) = \gamma_1 S(x,t) + \gamma_2 S(x,1-t)$,

$S(x,t)$ - ядро оператора S, определенного соотношением $(E + S_\beta)^{-1} = E + S$,

$$S_\beta = Q\widetilde{S}_\beta, Qf(x) = \delta^{-1}\{(\alpha_1 - \alpha_2)f(x) + (\alpha_3 - \alpha_4)f(1-x)\},$$

$\widetilde{S}_\beta f(x) = \int_0^1 \widetilde{S}_\beta(x,t)f(t)dt,\ \widetilde{S}_\beta(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}A(x,t) + \beta A(x,t), \beta$ - число, определенное теоремой 1 из [1], E - единичный оператор.

ТЕОРЕМА. Если $\gamma_2(b\gamma_2 + a\gamma_1 \pm \delta^{-1/2}a) + ab\delta_{0,\gamma_2} \neq 0$ ($\delta_{0,\gamma_2} \neq 0$ только при $\gamma_2 = 0$), то корневые вектора оператора A образуют базис Рисса в $L_2[0,1]$.

Отметим, что д о к а з а т е л ь с т в о сводится к установлению аналогичного утверждения для интегро-дифференциального оператора L в векторном пространстве $L_2^2[0,1/2]$ со скалярным произведением

$$\langle y,z \rangle = \int_0^{1/2} (y^1(t)\overline{z^1(t)} + y^2(t)\overline{z^2(t)})dt, \quad y(t) = (y^1(t), y^2(t))^T, z(t) = (z^1(t), z^2(t))^T,$$

T - знак транспонирования. Для этого оператора L выводятся асимптотические формулы для его собственных значений λ_m, строится асимптотическое представление резольвенты $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ и устанавливается два важных свойства:

1) $\left\| \sum_{m \in J} \int_{C(\lambda_m)} R_\lambda d\lambda \right\|_1 \leq K$, где K не зависит от J, J - произвольный конечный набор целых попарно различных чисел, $C(\lambda_m)$ - достаточно малый контур, охватывающий λ_m и не охватывающий других его собственных значений, $\|\cdot\|_1$ - норма в пространстве $L_2^2[0,1/2]$.

2) ни один ненулевой вектор $f \in L_2^2[0, 1/2]$ не удовлетворяет условиям $E(\lambda_m)f = 0$ для всех $\lambda_m \in \sigma(L)$, где $E(\lambda_m) = (-2\pi i)^{-1} \int\limits_{C(\lambda_m)} R_\lambda d\lambda$, $\sigma(L)$ - спектр оператора L, $C(\lambda_m)$ - то же, что и в свойстве 1).

Эти свойства позволяют установить утверждение теоремы для оператора L, а затем и для оператора A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А.П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 9-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1997. С. 162.

2. *Хромов А.П.* Одномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов с ядрами, имеющими особенности на диагоналях // Воронеж. весенняя мат. шк. «Понтрягинские чтения» :Тез. докл. Воронеж, 1997. С. 160.

3. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Воронеж. весенняя мат. шк. «Понтрягинские чтения» :Тез. докл. Воронеж, 1998. С. 208.

4. *Курдюмов В.П.* О базисности Рисса корневых векторов интегральных операторов с разрывными ядрами // Современные проблемы теории функций и их приложения :Тез. докл. 9-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1997. С. 96.

5. *Курдюмов В.П.* Теорема о базисности Рисса корневых векторов одного класса интегральных операторов // Воронеж. весенняя мат. шк. «Понтрягинские чтения» :Тез. докл. Воронеж, 1998. С.180.

6. *Курдюмов В.П.* О базисности по Риссу корневых векторов интегрального оператора с ядром типа функции Грина // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов, 1976. Вып. 6, ч. II. С. 25 - 43.

7. *Курдюмов В.П.* Необходимые и достаточные условия оптимальности для дифференциально-операторного уравнения. Саратов, 1985. 35 с. Деп. в ВИНИТИ 02.07.85, № 4781.