УДК 517.984

Ю. В. Курышова

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Рассмотрим следующие краевые задачи $L_i = L_i(q,M)$:

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x,t)y(t)dt = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) = y^{(i-1)}(\pi) = 0,\ i = 1,2 \tag{2}$$

Здесь $x \in [0,\pi]$, $q(x) \in \mathbf{L}_2(0,\pi)$, $M(x,t)$ интегрируемая на $(0,\pi)\times(0,x)$ функция. Полагаем $\int_0^\pi q(x)dx = 0$. Обозначим через $\{\lambda_{ni}\}_{n=1}^\infty$ собственные значения (СЗ) задачи L_i. В настоящей статье исследуется обратная задача восстановления потенциала q по двум спектрам задач L_i (функция M полагается известной).

Краевая задача $L_i^* = L_i^*(q,M)$:

$$\ell^* z \equiv -z'' + q(x)z + \int_x^\pi M(t,x)z(t)dt = \lambda z \tag{3}$$

$$z(0) = z^{(i-1)}(\pi) = 0, \tag{4}$$

называется сопряжённой к задаче L_i.

Пусть $S(x,\lambda)$ есть решение уравнения (1) с начальными условиями $S(0,\lambda)=0$, $S'(0,\lambda)=1$, а $S^*(x,\lambda)$, $C^*(x,\lambda)$ решения уравнения (3) с начальными условиями $S^*(\pi,\lambda)=0$, $S^{*'}(\pi,\lambda)=-1$ и $C^*(\pi,\lambda)=1$, $C^{*'}(\pi,\lambda)=0$. Введём функции $\{\xi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ по следующим формулам

$$\xi_{2n}(x) = 1 - \frac{2\lambda_{n1}}{b_{n1}} S^*(x,\lambda_{n1})S\ (x,\lambda_{n1}), \xi_{2n-1}(x) = 1 - \frac{2\lambda_{n2}}{b_{n2}} C^*(x,\lambda_{n2})S\ (x,\lambda_{n2}),$$

где числа b_{ni} определяются соотношениями

$$b_{n1}S^0(x,\mu_{n1}) = S^{0*}(x,\mu_{n1}),\quad b_{n2}S^0(x,\mu_{n2}) = C^{0*}(x,\mu_{n2}).$$

Функции S^0, S^{0*}, C^{0*} задаются аналогично функциям S, S^*, C^*, но для уравнений с $M \equiv 0$, а $\{\mu_{ni}\}_{n=1}^\infty$ собственные значения задач $L_i^0 = L_i(q,0)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\{\lambda_{ni}\}_{n=1}^\infty$ - СЗ краевых задач $L_i(q,M)$ и пусть функции $\{\xi_n(x)\}_1^\infty$ ω – линейно независимы в $\mathbf{L}_2(0,\pi)$. Найдётся число $\delta > 0$ та-

[1] Работа выполнена при поддержке Саратовского международного центра перспективных исследований (СМЦПИ), грант № 99-1-01.

кое, что для чисел $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ выбранных из условия $\Lambda := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n1} - \tilde{\lambda}_{n1}|^2 + |\lambda_{n2} - \tilde{\lambda}_{n2}|^2} < \delta$, существует функция $\tilde{q}$ из $\mathbf{L}_2(0,\pi)$ такая, что числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ являются СЗ задач $L_i(\tilde{q}, M)$, причём $\|\tilde{q} - q\|_{\mathbf{L}_2} < C\Lambda$, где константа C зависит лишь от задач $L_i(q, M)$.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Система функций $\{\xi_n(x)\}_1^{\infty}$ является базисом Риса в $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{span}\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}}$, обозначим $\{\chi_n(x)\}_1^{\infty}$ биортогональный базис. Условимся для произвольной функции $H(x,\lambda)$ обозначать $H_{ni}(x) = H(x, \tilde{\lambda}_{ni})$.

Рассмотрим в $\mathrm{B}_1 = \overline{\mathrm{span}\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}}$ интегральное уравнение

$$r(x) = f(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi}}_{j} H_j(x, t_1 \ldots, t_j) \; r(t_1) \ldots r(t_j) dt_1 \ldots dt_j, \tag{6}$$

здесь

$$f(x) = -2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S(\pi, \tilde{\lambda}_{n1}) \chi_{2n}(x) + \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} S'(\pi, \tilde{\lambda}_{n2}) \chi_{2n-1}(x) \right),$$

$$H_j(x, t_1, \ldots, t_j) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S^*_{n1}(t_1) G_{n1}(t_1, t_2) \ldots G_{n1}(t_{j-1}, t_j) S_{n1}(t_j) \chi_{2n}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} C^*_{n2}(t_1) G_{n2}(t_1, t_2) \ldots G_{n2}(t_{j-1}, t_j) S_{n2}(t_j) \chi_{2n-1}(x) \right).$$

$G(x,t,\lambda)$ продолженная нулём функция Грина задачи Коши $\ell y = \lambda y$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Можно показать, что $\|f(x)\|_2 < C\Lambda$; $\|H_j(x, t_1, \ldots, t_j)\|_2 < C_0^j, (j \geq 2)$, где $\|\cdot\|_2$ - норма в $\mathbf{L}_2(0,\pi)$. Существует фиксированное число $\delta > 0$ такое, что при $\Lambda < \delta$ уравнение (6) имеет единственное решение $r(x)$ в классе B_1 в шаре $\| r \| < 2\delta C$, причём $\| r \| < 2 \| f \|$. Обозначим $\tilde{q}(x) := q(x) - r(x)$. Покажем, что числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ образуют спектр задач $L_i(\tilde{q}, M)$, $\tilde{\ell} y \equiv -y'' + \tilde{q}(x) y + \int_0^x M(x,t) y(t) dt$.

С этой целью рассмотрим уравнение

$$\tilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \int_0^{\pi} G_{ni}(x,t) r(t) \tilde{y}_{ni}(t) dt. \tag{7}$$

Решаем его методом последовательных приближений, получим

$$\widetilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \varphi_{ni}(x), \tag{8}$$

где $$\varphi_{ni}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{j} G_{ni}(x,t_1)\dots G_{ni}(x,t_j) \;\; r(t_1)\dots r(t_j)dt_1\dots dt_j.$$

Тождество (6) равносильно некоторому уравнению вида $\ell y - \lambda y = p(x)$, из которого нетрудно получить

$$\widetilde{\ell}\widetilde{y}_{ni} = \widetilde{\lambda}_{ni}\widetilde{y}_{ni}(x), \; \widetilde{y}_{ni}(0) = 0; \widetilde{y}'_{ni}(0) = 1. \tag{9}$$

Используя (9) и (3), записанное для решений $S^*_{n1}(x)$ и $C^*_{n2}(x)$, получим

$$\begin{gathered}\int_0^\pi r(x)S^*_{n1}(x)\widetilde{S}_{n1}(x)dx \equiv S_{n1}(\pi) - \widetilde{y}_{n1}(\pi),\\ \int_0^\pi r(x)C^*_{n2}(x)\widetilde{S}_{n2}(x)dx \equiv S'_{n2}(\pi) - \widetilde{y}_{n2}(\pi).\end{gathered} \tag{10}$$

Далее, умножая тождество (6) на $\xi_n(x)$, интегрируя его по x от 0 до π, и учитывая при этом формулы (8), получим

$$\begin{gathered}\int_0^\pi r(x)S^*_{n1}(x)\widetilde{S}_{n1}(x)dx \equiv S_{n1}(\pi) - \int_0^\pi r(x)dx,\\ \int_0^\pi r(x)C^*_{n2}(x)\widetilde{S}_{n2}(x)dx \equiv S'_{n2}(\pi) - \int_0^\pi r(x)dx.\end{gathered} \tag{11}$$

Сравнивая (10) и (11), имеем:

$$\widetilde{y}_{n1}(\pi) = \int_0^\pi r(x)dx, \qquad \widetilde{y}'_{n2}(\pi) = \int_0^\pi r(x)dx. \tag{12}$$

Имеет место оценка $\left|\widetilde{y}_{n1}(x)\right| < \dfrac{C}{n^2}$, следовательно, из (12) при $n \to \infty$ получим $\int_0^\pi \widetilde{q}(x)dx = 0$, и $\widetilde{y}_{n1}(\pi) = 0$, $\widetilde{y}'_{n2}(\pi) = 0$. Функции $\widetilde{\Delta}_1(\lambda) := \widetilde{y}_{n1}(\pi)$ и $\widetilde{\Delta}_2(\lambda) := \widetilde{y}'_{n2}(\pi)$ называются характеристическими для задач $\widetilde{L}_i$, множество их нулей совпадает со спектрами. Из (12) имеем $\widetilde{\Delta}_1(\widetilde{\lambda}_{n1}) = \widetilde{\Delta}_2(\widetilde{\lambda}_{n2}) = 0$, следовательно, числа $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_1^\infty$ составляют спектр задач $\widetilde{L}_i$. Теорема доказана.