УДК 517.984

Д. С. Лукомский

ОБ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА[1]

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x,\rho) y^{(k)} = 0, \quad P_k(x,\rho) = \sum_{i=k}^{n} \rho^{n-i} p_{ki}(x), \quad x \in (0,+\infty). \quad (1)$$

Полагаем, что p_{kk} - постоянные, $p_{ki}(x) \in L(0,\infty)$, $p_{k,k+1}(x)$ - абсолютно непрерывны, $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{k+1,n}$.

Пусть $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ - корни характеристического многочлена для (1), имеющего вид $F(R) = \sum_{k=0}^{n} p_{kk} R^k$, $(p_{nn} = 1)$. Считаем, что $R_k - R_j \neq 0, k \neq j$ и $R_k \neq 0, k = \overline{1,n}$. Известно, что комплексную плоскость (ρ) можно разбить на N секторов так, что внутри каждого из них корни $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ могут быть занумерованы следующим образом:

$$\mathrm{Re}(\rho R_1) < \mathrm{Re}(\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(\rho R_n) \qquad \forall \rho \in S_\nu. \quad (2)$$

Пусть функции $\Phi(x,\rho) = [\Phi_m(x,\rho)]_{m=\overline{1,n}}$ являются решениями (1) при условиях $U_{\xi 0}(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$, $(\xi = \overline{1,m})$, а также $\Phi_m(x,\rho) = O\left(e^{\rho R_m x}\right)$, $x \to \infty$, $\rho \in S_\nu$, R_m занумерованы в порядке (2), где

$$U_{\xi 0}(y) = y^{(n-\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{n-\xi} \rho^k u_{k\xi}\, y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\beta_{k,k+1}^{(\xi)}}{\rho^i}, \quad \beta_{k,k+1}^{(\xi)} \text{ - const.}$$

$U = \{U_{\xi 0}\}_{\xi=\overline{1,n}}$ - линейные формы для уравнения (1).

Обозначим $M_{mk}(\rho) = U_{k,0}(\Phi_m)$, $k = \overline{m+1,n}$. $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$, $M_{mk}(\rho) = \delta_{mk}$, $k = \overline{1,m}$.

Условимся, что наряду с L рассматриваются дифференциальный оператор и линейные формы $\widetilde{L}$ того же вида, но с другими коэффициентами. Если некоторый символ φ обозначает объект, относящийся к L, то $\widetilde{\varphi}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{L}$, а $\hat{\varphi} = \varphi - \widetilde{\varphi}$.

В дальнейшем всегда считаем, что $p_{kk} = \widetilde{p}_{kk}$.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Саратовского международного центра перспективных исследований, грант № 99-1-01.

Обозначим $\omega_\xi(R)=R^{n-\xi}\sum_{i=0}^{n-\xi}\frac{\beta_{ii}^{(\xi)}}{R_i}$, $\qquad \Delta(p)=\det(\omega_\xi(R_k))_{\xi,k=\overline{1,p}}$.

Наложим некоторые ограничения. Считаем, что для любого $p=\overline{1,n}$, $\Delta(\rho)\neq 0$. Это условие должно выполняться для любого сектора S_ν с его собственной нумерацией корней $\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$.

Обозначим через W_η - множество функций $f(x)$, $0\le x\le\infty$ таких, что $f(x)$, $f'(x),\dots,$ $f^{(\eta-1)}(x)$ - абсолютно непрерывны и $f^{(k)}(x)\in L(0,\infty)$, $k=\overline{0,\eta}$. Пусть $N\ge 2$ - фиксированное, целое число. Будем говорить, что $L\in Y_N$ если $p_{\eta j}(x)\in W_{\eta+N}$, $j=\overline{\eta+1,n}$ при любом фиксированном ρ, $\eta=\overline{0,n-2}$. В дальнейшем считаем, что $L\in Y_N$.

Обозначим

$$\langle y(x,\rho),z(x,\rho)\rangle=\sum_{i,j=0}^{n-1}\Theta_{ij}(x,\rho)y^{(i)}(x,\rho)z^{(j)}(x,\rho),$$

$$\Theta_{ij}(x,\rho)=\sum_{s=j}^{n-i-1}(-1)^s C_s^j P_{s+i+1}^{(s-j)}(x,\rho),\quad i+j\le n-1,$$

$$\Theta_{ij}(x,\rho)=0,\qquad\qquad i+j>n-1.$$

Рассмотрим сопряженные дифференциальный оператор и линейные формы $L^*=(l^*,U^*)$

$$l^*z\equiv z^{(n)}+\sum_{\eta=0}^{n-1}(-1)^\eta(P_\eta(x,\rho)z)^{(\eta)}=0,\tag{3}$$

$$U_{\xi 0}^*=z^{(n-\xi)}(0)+\sum_{\eta=0}^{n-\eta-1}\rho^\eta u_{\xi\eta 0}^* z^{(\eta)}(0),$$

где линейные формы $U^*=[(-1)^{k-1}U_{n-k+1,0}^*]_{k=\overline{1,n}}$- определяются из соотношения $\langle y,z\rangle_{/x=0}=U(y)U^*(z)$.

Обозначим $\Phi^*(x,\rho)=[(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}^*(x,\rho)]_{k=\overline{1,n}}^T$, где функции $\Phi_m^*(x,\rho)$ являются решениями (3) при условиях $U_\xi^*(\Phi_m)=\delta_{\xi m}$, $\xi=\overline{1,m}$, $\Phi_m^*(x,\rho)=O\left(e^{\rho R_m^* x}\right)$, $x\to\infty$, $R_m^*=-R_{n-m+1}$.

Пусть $\widetilde{L}=\left(\widetilde{l},\widetilde{U}\right)$ - некоторые известные дифференциальный оператор и линейные формы. Обозначим через $\xi_{\nu\pm}$ - верхний (нижний) берег разреза вдоль луча γ_ν, $\Gamma_\nu^\pm=\{\rho:\rho\in\xi_\nu^\pm,\rho\notin\operatorname{int}\gamma_0\}$ где γ_0- ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}$.Рассмотрим в ρ-плоскости контур $\gamma=\bigcup_{\nu=1}^N\Gamma_\nu$, где $\Gamma_\nu=\Gamma_{\nu-1}^+\cup\Gamma_\nu^-\cup\gamma_0^\nu$, γ_0^ν часть контура γ_0 заключенная между лучами $\gamma_{\nu-1}$ и γ_ν.

Не уменьшая общности, в дальнейшем считаем, что $P_{n-1}(x,\rho)=0$. Обозначим $c_{kj}=\dfrac{b_k-b_j}{a_k-a_j}$ где $R_j=a_j+ib_j,\ k,j=\overline{1,n}$.

Введём следующие ограничения: для любых k,j,i: $c_{kj}\neq c_{ki}$, причем все индексы равноправны.

Обозначим $Y[\delta_{j,k-1}]_{j=\overline{1,n-1},\ k=\overline{1,n}}$, $M_\partial(\rho)=diag[M_{m,m+1}(\rho)]_{m=\overline{1,n-1}}$, $\widetilde{A}_0(\rho)=\hat{M}(\rho)\widetilde{M}^{-1}(\rho)$, $A_0(\rho)=\hat{M}(\rho)M^{-1}(\rho)$,

Определим матрицы $f(x,\rho)=[f_k(x,\rho)]_{k=\overline{2,n}}$, $f^*(x,\rho)=[(-1)^{k-1}f^*_{n-k+1}(x,\rho)]^T_{k=\overline{1,n-1}}$, по формулам

$$f_k(x,\rho)=\kappa_\nu(\rho)\Phi_k(x,\rho),\qquad f^*_k(x,\rho)=\kappa^*_\nu\Phi^*_k(x,\rho),$$

где $\kappa_\nu=0$ на γ_ν если Φ_k имеет скачок на γ_ν, $\kappa_\nu=1$ на γ_ν если Φ_k аналитична на γ_ν. Аналогично определяются функции κ^*_ν для Φ^*_k.

При $\rho\in\gamma$ положим $\alpha(\rho)=\prod_{\nu=1}^N\kappa_{+\nu}YA_0(\rho)Y^T$, $N(\rho)=E+\frac{1}{2}\alpha(\rho)$, $\widetilde{\alpha}(\rho)=\prod_{\nu=1}^N\kappa_{+\nu}Y\widetilde{A}_0(\rho)Y^T$, $\widetilde{N}(\rho)=E+\frac{1}{2}\widetilde{\alpha}(\rho)$, где $\kappa_{+\nu}(\rho)=1$ при $\rho\in\Gamma_\nu\cup\gamma_0$, $\kappa_{+\nu}(\rho)=0$ при $\rho\in\bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^N\Gamma_\nu$.

При $\rho,\mu\in\gamma$ определим матрицы $\varphi(x,\rho)=[\varphi_k(x,\rho)]_{k=\overline{2,n}}$, $\psi(x,\rho)=[\psi_k(x,\rho)]_{k=\overline{2,n}}$,

$$g^*(x,\rho)=[g^*_k(x,\rho)]^T_{k=\overline{2,n}},\ r(x,\rho,\mu)=[r_{kj}(x,\rho,\mu)]_{k=\overline{2,n}},$$

по формулам

$$\varphi(x,\rho)=\begin{cases}Y\Phi(x,\rho), & \rho\in\gamma_0,\\ f(x,\rho), & \rho\in\bigcup_{\nu=1}^N\Gamma_\nu,\end{cases}$$

$$g^*(x,\rho)=\begin{cases}-\Phi^*(x,\rho)A_0(\rho)Y^T, & \rho\in\gamma_0,\\ -f^*(x,\rho)\hat{M}_\partial(\rho), & \rho\in\bigcup_{\nu=1}^N\Gamma_\nu,\end{cases}$$

$$\psi(x,\rho)=V^{(-1}(x)\varphi(x,\rho),\qquad r(x,\rho,\mu)=\frac{\left\langle\varphi(x,\rho),g^*(x,\mu)\right\rangle}{\rho-\mu},$$

где $V(x)$ - главная часть асимптотики определителя при $|\rho|\to\infty$

$$\det(\widetilde{\Phi}_k^{(n-1)}(x,\rho),\ldots,\widetilde{\Phi}'_k(x,\rho),\Phi_k(x,\rho))_{k=\overline{1,n}}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. При любом фиксированном $x > 0$, $\psi(x,\rho)$ является решением уравнения

$$\widetilde{\varphi}(x,\rho) = \widetilde{N}(x,\rho)\psi(x,\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \widetilde{r}(x,\rho,\mu)\,\psi(x,\mu)\,d\mu \qquad \rho \in \gamma.$$

Решая это уравнение и проводя дополнительные исследования, находим $\{\eta_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$, где $\eta_k(x,\rho) = V^{-1}(x)\Phi_k(x,\rho)$, $k = \overline{1,n}$.

Обозначим $\Delta = \det(\eta_k^{(j)}(x,\rho))_{k=\overline{1,n},\ j=\overline{n-1,0}}$. Введем определители Δ_j получающиеся из определителя Δ заменой j-го столбца ($j = \overline{1,n}$) на столбец

$$\eta = [-\eta_k^{(n)}(x,\rho)]_{k=\overline{1,n}}.$$

Далее, последовательно находим

$$P_k(x,\rho) = \frac{\Delta_{n-k}}{\Delta} - \sum\nolimits_{i=k+1}^{n} C_i^k\, P_i(x,\rho)\frac{V^{(i-k)}(x)}{V(x)}, \qquad k = \overline{n-2,0}.$$

Что и решает задачу определения дифференциального уравнения.

УДК 519.6

И. Д. Молоденкова

ПРИЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ОСРЕДНЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

В работах [1, 2] осредняющие операторы типа свертки применяются для выделения информативной составляющей экспериментальной кривой и подавления функции помех.

Здесь операторы такого типа применяются для восстановления непрерывной 2π-периодической функции, заданной своим δ - приближением в $L_2 : \| f_\delta - f \|_{L_2} \le \delta$.

Построена последовательность осредняющих операторов:

$$A(x, f_\delta, H) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t, H) f_\delta(t)\,dt, \tag{1}$$

$H = 2\pi/(n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$, сохраняющих тригонометрические сплайны в смысле П.-Ж. Лорана [3]:

$$\sigma(x) = \sigma(-\pi)\cos(x+\pi) + \sigma'(-\pi)\sin(x+\pi) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{2}[\sin((x-x_i)_+) - (x-x_i)_+ \cos(x-x_i)], \tag{2}$$

$x_i = x_0 + iH$, $i = \overline{0,n+1}$, $x_0 = -\pi$, $x_{n+1} = \pi$.

Ядра операторов ищутся в виде