ТЕОРЕМА 1. При любом фиксированном $x > 0$, $\psi(x,\rho)$ является решением уравнения

$$\widetilde{\varphi}(x,\rho) = \widetilde{N}(x,\rho)\psi(x,\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\widetilde{r}(x,\rho,\mu)\,\psi(x,\mu)\,d\mu \qquad \rho\in\gamma.$$

Решая это уравнение и проводя дополнительные исследования, находим $\{\eta_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$, где $\eta_k(x,\rho) = V^{-1}(x)\Phi_k(x,\rho)$, $\quad k=\overline{1,n}.$

Обозначим $\Delta = \det(\eta_k^{(j)}(x,\rho))_{k=\overline{1,n},\ j=\overline{n-1,0}}$. Введем определители Δ_j получающиеся из определителя Δ заменой j-го столбца ($j=\overline{1,n}$) на столбец

$$\eta = [-\eta_k^{(n)}(x,\rho)]_{k=\overline{1,n}}.$$

Далее, последовательно находим

$$P_k(x,\rho) = \frac{\Delta_{n-k}}{\Delta} - \sum\nolimits_{i=k+1}^{n} C_i^k\, P_i(x,\rho)\frac{V^{(i-k)}(x)}{V(x)}, \qquad k=\overline{n-2,0}.$$

Что и решает задачу определения дифференциального уравнения.

УДК 519.6

И. Д. Молоденкова

ПРИЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ОСРЕДНЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

В работах [1, 2] осредняющие операторы типа свертки применяются для выделения информативной составляющей экспериментальной кривой и подавления функции помех.

Здесь операторы такого типа применяются для восстановления непрерывной 2π-периодической функции, заданной своим δ - приближением в $L_2 : \| f_\delta - f \|_{L_2} \le \delta$.

Построена последовательность осредняющих операторов:

$$A(x, f_\delta, H) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x,t,H) f_\delta(t)\,dt, \tag{1}$$

$H = 2\pi/(n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$, сохраняющих тригонометрические сплайны в смысле П.-Ж. Лорана [3]:

$$\sigma(x) = \sigma(-\pi)\cos(x+\pi) + \sigma'(-\pi)\sin(x+\pi) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{2}[\sin((x-x_i)_+) - (x-x_i)_+ \cos(x-x_i)], \tag{2}$$

$x_i = x_0 + iH$, $i=\overline{0,n+1}$, $x_0 = -\pi$, $x_{n+1} = \pi$.

Ядра операторов ищутся в виде

$$
K(x,t,H)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{3}\alpha_j(x)\varphi_j(t), & x\in[-\pi,x_1) \text{ или } (x_n,\pi]\\ \sum_{j=1}^{5}\beta_j(x)\varphi_j^1(t), & x\in(x_l,x_{l+1}),\ l=\overline{1,n-1}\\ \sum_{j=1}^{7}\gamma_j(x)\varphi_j^2(t), & x\in\Omega(x_l),\end{cases}
$$

$$
\Omega(x_l): x_l-\delta/2<x<x_l+\delta/2,\quad l=\overline{1,n},
$$

$\alpha_j(x), \beta_j(x), \gamma_j(x)$ – коэффициенты, подлежащие определению из систем, полученных из условия сохранения на $[-\pi, x_1)$, $(x_n, \pi]$ функций $1, \sin x, \cos x$; на (x_l, x_{l+1}) - функций $1, \sin x, \cos x, x\sin x, x\cos x$; на $\Omega(x_l)$ - функций $1, \sin x, \cos x, x\sin x, x\cos x, x_+\sin x, x_+\cos x$. $\varphi_j(t), \varphi_j^1(t), \varphi_j^2(t)$ - линейно-независимые функции, полученные сдвигом

$$
\varphi(t)=\begin{cases}1/h, 0\le t\le h\\ 0, \text{ по - другому}\end{cases},
$$

$$
\varphi_j(t)=\begin{cases}\varphi(t-(j-1)h+\pi), & x\in[-\pi,x_1),\\ \varphi(t-(j-1)h-x_n), & x\in(x_n,\pi],\quad h=H/3,\quad j=\overline{1,3},\end{cases}
$$

$$
\varphi_j^1(t)=\varphi(t-(j-1)h-x_l),\quad x\in(x_l,x_{l+1}),\quad h=H/5,\quad l=\overline{1,n-1},
$$

$$
\varphi_j^2(t)=\varphi(t-(j-1)h-x_l+\delta/2),\quad x\in\Omega(x_l),\quad h=\delta/7,\quad \delta=H/10,\quad l=\overline{1,n}.
$$

За осреднение принимается $A(x,f_\delta,H)$. В случае численной реализации значения $A(x,f_\delta,H)$ вычисляются с помощью квадратурных формул.

Доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть 2π-периодическая непрерывная функция задана своим δ-приближением в $L_2: \| f_\delta - f \|_{L_2} \le \delta$. Пусть $\{A(x,f_\delta,H)\}$, $H=2\pi/(n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$ последовательность (1). Тогда $\{A(x,f_\delta,H)\}$ сходится к $f(x)$ при $\delta\to 0$, $H\to 0$ по норме пространства C.

На основе двусторонней оценки для интегральных операторов Г.В. Хромовой [4] для функций $f(x)$ класса $\mu_2^1=\{f(x)\in W_2^1[-\pi,\pi]: \|f\|_{W_2^1}\le 1\}$, где $W_2^1[-\pi,\pi]$ - пространство вещественных абсолютно-непрерывных функций, $f'\in L_2$, $\|f\|_{W_2^1}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^2+(f')^2\right)dx\right)^{1/2}$ доказана

ТЕОРЕМА 2. На классе функций μ_2^1 справедлива оценка

$$
2^{-1/4}3^{1/4}k^{1/2}\delta^{1/2}\le\Delta\le 2^{3/4}3^{1/4}k^{1/2}\delta^{1/2}, \tag{3}
$$

где $\Delta = \Delta(\delta, H, 1) = \sup\{ \|A(x, f_\delta, H) - f(x)\|_C : \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta,\ f \in \mu_2^1 \}$,

$$\mu_1^2 = \{f(x) \in W_2^1[-\pi, \pi] : \| f \|_{W_2^1} \le 1\},\quad k = \max\begin{cases} 3\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{3}(\alpha_j(x))^2} \\ 5\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{5}(\beta_j(x))^2} \\ 7\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{7}(\gamma_j(x))^2} \end{cases}.$$

Отметим, что оценка приближения (3) с точностью до константы совпадает по порядку δ с неулучшаемой оценкой метода регуляризации А.Н. Тихонова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск, 1983.

2. *Василенко В.А., Зюзин М.В., Ковалков А.В.* Сплайн-функции и цифровые фильтры. Новосибирск, 1984г.

3. *Лоран П.Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М., 1975.

4. *Хромова Г.В.* Об оценках погрешностей приближенных решений интегральных уравнений 1-го рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. Выч. математика и кибернетика. 1990. № 2. С.19.

УДК 517.6

М. Г. Плешаков

ОДИН КОНТРПРИМЕР ДЛЯ КОМОНОТОННОГО НЕРАВЕНСТВА ДЖЕКСОНА[1]

Получение оценки уклонения при равномерном приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами является важной задачей в теории приближения функций. Особый интерес представляет случай, когда приближение является формосохраняющим (Shape-preserving Approximation) [1], т.е. когда аппарат приближения сохраняет некоторые свойства приближаемой функции (монотонность, выпуклость и т.д.). В 1979 году А.С. Шведов [2, 3] построил пример, показы-

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120.