$$\frac{\|\tau_n - f\|}{\omega_k(f;\frac{1}{n})} \geq \frac{\frac{c_2 b_n}{n}\left(1 - \frac{c_1 b_n n}{c_2}\right)}{2^k c_1 b_n^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^k M_k} \geq \frac{1}{2n} \frac{c_2 b_n}{2^k c_1 b_n^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^k M_k} =: B_Y n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Для случая $n > N_0$ неравенство (3) доказано. Для случая $n < N_0$ оно следует из неравенства $E_n^{(1)}(f;Y) \geq E_{1+N_0}^{(1)}(f;Y)$. Пример доказан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гилевич Я.*, *Шевчук И.А.* Комонотонное приближение // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т.2, № 2. С. 319 - 363.

2. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.:Наука, 1977.

3. *Шведов А.С.* Теорема Джексона в L_p, $0 < p < 1$, для алгебраических многочленов и порядки комонотонных приближений // Матем. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 107 - 117.

4. *Шведов А.С.* Комонотонное приближение функций многочленами //ДАН СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 39 - 42.

УДК 519.853.3

Н. В. Рыхлов

ФОРМУЛА СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА КАЛИБРОВОЧНОЙ ФУНКЦИИ[1]

Пусть множество M - выпуклый телесный компакт из конечномерного пространства R^p, содержащий внутри себя нулевой элемент: $0 \in \operatorname{int} M$. Как известно [1, с. 45], калибровочной функцией (или функцией Минковского) называется $n_M(x) = \left\{ \mu > 0 \;\middle|\; \frac{x}{\mu} \in M \right\}$. Получим формулу субдифференциала этой выпуклой функции. Напомним, что субдифференциалом выпуклой на R^p функции $f(x)$ в точке x_0 называется множество

$$\partial f(x_0) = \left\{ v \in R^p \;\middle|\; f(x) - f(x_0) \geq (v, x - x_0), \;\forall\; x \in R^p \right\}.$$

Через M^* будем обозначать поляру множества M, то есть

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.

$$M^* = \left\{ l \in R^p \middle| \ (l,x) \le 1, \ \forall \ x \in M \right\},$$

а через $n_M^*(w) = \max_{w_0 \in M} (w_0, w)$ - поляру калибра [1, с. 150].

ТЕОРЕМА. Имеет место формула

$$\partial n_M(x_0) = \begin{cases} \left\{ w \in R^p \middle| \ n_M^* = 1, \ (w,x_0) = n_M(x_0) \right\} \text{ если } x_0 \ne 0, \\ M^*, \text{ если } x_0 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Доказательство.

1. Рассмотрим случай, когда $x_0 \ne 0$.

А) пусть для w выполняется $n_M^*(w) = 1$, $(w,x_0) = n_M(x_0)$. Нетрудно показать, что

$$n_M(x) = \max_{w \in M^*} (w,x). \tag{2}$$

В соответствии с (2) мы может записать: $n_M(x) \ge (w,x)$, $\forall \ w \in M^*$. Вычитая из этого неравенства равенство $n_M(x_0) = (w,x_0)$, получаем: $n_M(x) - n_M(x_0) \ge (w, x - x_0)$. Следовательно, $w \in \partial n_M(x_0)$, и в целом

$$\left\{ w \in R^p \middle| \ n_M^* = 1, \ (w,x_0) = n_M(x_0) \right\} \subset \partial n_M(x_0). \tag{3}$$

Б) пусть $w \in \partial n_M(x_0)$, то есть

$$n_M(x) - n_M(x_0) \ge (w, x - x_0), \qquad \forall \ x \in R^p. \tag{4}$$

Положив в этом неравенстве $x = 0$, получим:

$$n_M(x_0) \le (w, x_0). \tag{5}$$

Если взять $x = \alpha x_0$, $\alpha > 1$, то

$$\alpha n_M(x_0) - n_M(x_0) \ge (w, \alpha x_0 - x_0) \Leftrightarrow (\alpha - 1) n_M(x_0) \ge (\alpha - 1)(w, x_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n_M(x_0) \ge (w, x_0) \tag{6}$$

Из (5), (6) следует

$$n_M(x_0) = (w, x_0). \tag{7}$$

Покажем, что $n_M^*(w) \le 1$. Предположим противное: $n_M^*(w) > 1$. Возьмем $w_0 = \dfrac{w}{n_M^*(w)}$. Тогда $n_M^*(w) = 1$ и $w_0 \in M^*$, то есть w_0 - граничная точка для M^*. По теореме об опорной гиперплоскости [1, с. 116] существует элемент $z_0 \in R^p$, $\|z_0\| = 1$, такой, что

$$(w_0, z_0) = \max_{n_M^*(w) = 1} (w, z_0) = n_M(z_0). \tag{8}$$

Пользуясь неравенством (4), получаем: $n_M(z) \ge (w,z)$, $\forall\ z \in R^p$. Тогда

$$n_M(z_0) \ge (w,z_0) = \overset{*}{n}_M(w)\left(\frac{w}{\overset{*}{n}_M(w)}, z_0\right) > \left(\frac{w}{\overset{*}{n}_M(w)}, z_0\right) = (w_0, z_0) = n_M(z_0).$$

Получили противоречие. Значит, $\overset{*}{n}_M(w) \le 1$. Но, учитывая (7), имеем

$$\overset{*}{n}_M(w) = 1. \tag{9}$$

Из (7), (9) следует включение

$$\partial n_M(x_0) \subset \left\{ w \in R^p \,\middle|\, \overset{*}{n}_M(w) = 1,\ (w,x_0) = n_M(x_0) \right\}, \quad \forall\ x_0 \ne 0. \tag{10}$$

Из (3) и (10) получаем (1) при $x_0 \ne 0$.

2. Пусть теперь $x_0 = 0$.

А) если $w \in M^*$, то $\overset{*}{n}_M(w) \le 1$. Из (2) следует, что $n_M(x) \ge (w,x)$ или $n_M(x) - n_M(0) \ge (w,x)$. А это означает, что $w \in \partial n_M(0)$. Тем самым показали справедливость включения $M^* \subset \partial n_M(0)$.

Б) пусть $w \in \partial n_M(0)$. Рассуждая также, как и в п.1 Б), нетрудно показать, что $w \in M^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

УДК 517.5

С. П. Сидоров

ОДНО ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Как установил П.П. Коровкин [1], порядок приближения положительными линейными полиномиальными операторами $L_n(f;x)$ ($n \in N$, $f \in C[0,1]$, $L_n f$ есть алгебраический полином степени n) не может быть выше, чем n^{-2} в $C[0,1]$. В.С. Виденский показал [2], что свойство полиномиальности операторов не является необходимым для доказательства этого результата П.П. Коровкина. Принципиальную роль играет ограниченность размерности пространства образов оператора. Обозначим $B[0,1]$ пространство действительных ограниченных функций с нормой $\| f \|_{B[0,1]} = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Напомним,

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.