Пользуясь неравенством (4), получаем: $n_M(z) \ge (w,z)$, $\forall\ z \in R^p$. Тогда

$$n_M(z_0) \ge (w,z_0) = n_M^*(w)\left(\frac{w}{n_M^*(w)}, z_0\right) > \left(\frac{w}{n_M^*(w)}, z_0\right) = (w_0,z_0) = n_M(z_0).$$

Получили противоречие. Значит, $n_M^*(w) \le 1$. Но, учитывая (7), имеем

$$n_M^*(w) = 1. \tag{9}$$

Из (7), (9) следует включение

$$\partial n_M(x_0) \subset \left\{ w \in R^p \middle|\ n_M^*(w) = 1,\ (w,x_0) = n_M(x_0) \right\}, \quad \forall\ x_0 \ne 0. \tag{10}$$

Из (3) и (10) получаем (1) при $x_0 \ne 0$.

2. Пусть теперь $x_0 = 0$.

А) если $w \in M^*$, то $n_M^*(w) \le 1$. Из (2) следует, что $n_M(x) \ge (w,x)$ или $n_M(x) - n_M(0) \ge (w,x)$. А это означает, что $w \in \partial n_M(0)$. Тем самым показали справедливость включения $M^* \subset \partial n_M(0)$.

Б) пусть $w \in \partial n_M(0)$. Рассуждая также, как и в п.1 Б), нетрудно показать, что $w \in M^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

УДК 517.5

С. П. Сидоров

ОДНО ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Как установил П.П. Коровкин [1], порядок приближения положительными линейными полиномиальными операторами $L_n(f;x)$ ($n \in N$, $f \in C[0,1]$, $L_n f$ есть алгебраический полином степени n) не может быть выше, чем n^{-2} в $C[0,1]$. В.С. Виденский показал [2], что свойство полиномиальности операторов не является необходимым для доказательства этого результата П.П. Коровкина. Принципиальную роль играет ограниченность размерности пространства образов оператора. Обозначим $B[0,1]$ пространство действительных ограниченных функций с нормой $\| f \|_{B[0,1]} = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Напомним,

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.

что линейный оператор $L_n f$, отображающий $C[0, 1]$ в линейное пространство конечной размерности $n+1$, называется оператором конечного ранга $n+1$.

ЛЕММА. Пусть $L_n(f;x)$ - линейный положительный оператор конечного ранга $n+1$, отображающий $C[0, 1]$ в $B[0, 1]$, такой, что $L_n(1;x) \equiv 1$. Тогда для $m \in N$

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| L_n(|t-x|^m;x) \right| \geq \left(\frac{1}{2(n+1)} \right)^m . \tag{1}$$

Доказательство. Возьмем какой-нибудь базис $\{u_j(x)\}_{j=0}^n$, $x \in [0,1]$, линейного пространства $\{L_n f : f \in C[0,1]\} \subset B[0,1]$ и рассмотрим матрицу $A = \| u_j(x_k) \|_{j=0,\dots,n;\ k=0,\dots,n+1}$, где $x_k = k/(n+1)$, $k = 0, \dots, n+1$. Ранг матрицы A не равен нулю, так как в противном случае возможно представление $L_n(f;x_k) = \sum_{j=0}^{n} a_j(f) u_j(x_k) = 0$ для всякой непрерывной на $[0, 1]$ функции f, что невозможно.

Возьмем ненулевой вектор $\{\delta_k\}_{k=0}^{n+1}$, ортогональный всем строкам матрицы A:

$$\sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| = 1, \ \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k u_j(x_k) = 0, \ j = 0, \dots, n.$$

Определим непрерывную на $[0,1]$ функцию $h(x)$ так, чтобы $h(x_k) = sign\, \delta_k$, $k = 0, \dots, n+1$; $h(x)$ является линейной на интервалах $[x_0, x_1], \dots, [x_n, x_{n+1}]$. Тогда $h(x) \in Lip_{2(n+1)} 1$, $\|h\|_{C[0,1]} = 1$.

Так как функция $L_n(h;x)$ лежит в линейном пространстве, порожденном функциями $\{u_j(x)\}_{j=0}^n$, то

$$\sum_{k=0}^{n+1} \delta_k L_n(h;x_k) = 0$$

Значит,

$$1 = \sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| = \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k h(x_k) = \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k \big(h(x_k) - L_n(h;x_k)\big) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| \left| L_n(h;x_k) - h(x_k) \right| \leq \| L_h h - h \|_{B[0,1]}. \tag{2}$$

Наконец, используя неравенство Гельдера для линейных положительных функционалов, мы получаем

$$\left|L_n(h;x)-h(x)\right| \le \left|L_n(h;x)-h(x)L_n(1;x)+h(x)L_n(1;x)-h(x)\right| \le$$

$$\le L_n(\left|h(t)-h(x)\right|;x)+\left|h(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right| \le 2(n+1)\left[L_n(\left|t-x\right|^m;x)\right]^{\frac{1}{m}}, \quad m=1,2,\ldots \quad (3)$$

Совмещая (2) и (3), получаем (1).

Пример. Линейный оператор $M_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mu_{k.n}(x)$,

где
$$\mu_{k,n}(x)=\begin{cases} -\dfrac{(k-nx-1)^l}{(k-nx)^l-(k-nx-1)^l}, & x\in[(k-1)/n,k/n]; \\ \dfrac{(k-nx+1)^l}{(k-nx+1)^l-(k-nx)^l}, & x\in[k/n,(k+1)/n]; \\ 0, \quad x\in[0,1]\setminus[(k-1)/n,(k+1)/n], & \end{cases}$$

l - некоторое фиксированное нечетное число, таков, что

1) $M_n(1;x)=1$;

2) $M_n((t-x)^l;x)=0$;

3) $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|M_n((t-x)^{l+1};x)\right|=\left(\dfrac{1}{2n}\right)^{l+1}$;

4) $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|M_n(\left|t-x\right|^l;x)\right|=\left(\dfrac{1}{2n}\right)^{l}$.

ТЕОРЕМА. Пусть L_n есть множество линейных положительных операторов конечного ранга $n+1$, действующих из $C[0,1]$ в $B[0,1]$, таких, что $L_n(1;x)\equiv 1$, $x\in[0,1]$. Для $m\in N$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^m \le \inf_{L_n\in \mathrm{L}_n}\sup_{x\in[0,1]}\left|L_n\left(\left|t-x\right|^m;x\right)\right| \le \left(\frac{1}{2n}\right)^m.$$

Это утверждение следует непосредственно из леммы и примера. При $m=0$ получается неравенство В. С. Виденского [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коровкин П. П.* О порядке приближения функций линейными положительными операторами //ДАН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1158 -1161.

2. *Виденский В. С.* Об одном точном неравенстве для линейных положительных операторов конечного ранга // Докл. АН ТаджССР. 1981. Т. 24, № 12. С. 715 - 717.