УДК 517.51

П. А. Терёхин

СЖАТИЯ И СДВИГИ ФУНКЦИИ С НЕНУЛЕВЫМ ИНТЕГРАЛОМ[1]

Пусть задана функция $\varphi(t)$, $t \in R^n$, и последовательность $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ линейных операторов в R^n. Для $k=0,1,\ldots$ и для $i=(i_1,\ldots,i_n)\in Z^n$ положим $\varphi_{k,i}(t)=\varphi(A_k t - i)$.

Определение. Семейство функций $\{\varphi_{k,i}\}$ назовём системой сжатий и сдвигов функции φ, если для каждого линейного оператора A_k существует обратный оператор A_k^{-1} и выполняется условие: $A_k^{-1} \to 0$ при $k \to \infty$.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $\varphi \in L_1 \cap L_p(R^n)$, $1<p<\infty$, имеет ненулевой интеграл $\int\limits_{R^n}\varphi(t)dt \neq 0$. Пусть, далее, существует постоянная M такая, что для любого числового семейства $\{c_i\} \in l_p(Z^n)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{i \in Z^n} c_i\,\varphi(\cdot - i) \right\|_p \le M \left(\sum_{i \in Z^n} |c_i|^p \right)^{1/p}.$$

Тогда система сжатий и сдвигов функции φ является системой представления в пространстве $L_p(R^n)$ в следующем смысле: любая функция $f \in L_p(R^n)$ может быть представлена в виде суммы семейства $f=\sum c_{k,i}\varphi_{k,i}$, коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(|\det A_k|^{-1} \sum_{i\in Z^n} |c_{k,i}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Сформулированная теорема даёт положительный ответ на вопрос работы [1] о справедливости аналогичной теоремы представления для функций φ, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i \in Z^n} |\varphi(\cdot - i)| \in L_p([0,1]^n).$$

Класс таких функций φ был введён в работе [2].

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 98-01-00842.

Отметим, что данная работа является продолжением и частично обобщением результатов автора [3 – 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Filippov V.I., Oswald P.* Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. of Approximation Theory. 1995. Vol. 82. P. 15 - 29.

2. *Jia R.Q., Micchelli C.* Using the refinement equation for the constraction of pre-wavelets. II. Pover of two // Curves and Surfaces (P.J. Laurent, A.L. Mchaute and L.L. Schumaker, Eds.). New York : Academic Press, 1991. P. 209 - 246 .

3. *Терёхин П.А.* Система сжатий и сдвигов функции в пространстве $L_p(R^n)$, $1 < p < \infty$ // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронеж, 1999. С. 184.

4. *Терёхин П.А.* Система сжатий и сдвигов функции на отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. Саратов, 1997. С. 153.

5. *Терёхин П.А.* О представляющих свойствах системы сжатий и сдвигов функции на отрезке // Изв. Тульск. гос. ун - та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т.4, вып. 1. С. 136 - 138.

6. *Терёхин П.А.* Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Сер. математика. 1999. №8. С. 72 - 81.

УДК 512.64

П.А. Терёхин

НОРМИРОВАННЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $d \geq 0$; $m, n \geq 1$ - целые числа. Билинейное отображение $\Phi : R^m \times R^n \to R^{n+d}$ назовём нормированным (НБО), если $|\Phi(x, y)| = |x| \cdot |y|$, где $|\cdot|$ - евклидова норма в пространстве соответствующей размерности.

Основной вопрос: при каких *d, m, n* существует НБО?

При $d = 0$ ответом на основной вопрос является следующая хорошо известная теорема.

ТЕОРЕМА (Гурвиц, Радон, Экман [1]).

НБО $\Phi : R^m \times R^n \to R^n$ существует тогда и только тогда, когда