$m \le \rho(n)$, где функция $\rho(n)$ однозначно определена следующими соотношениями:

1) $\rho(n) = \rho(2^k)$, если $n = 2^k \cdot (2N+1)$;

2) $\rho(16n) = \rho(n) + 8$;

3) $\rho(2^k) = 2^k$, если $k = 0,1,2,3$.

При $d = 1$ справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА [2]. НБО $\Phi : R^m \times R^n \to R^{n+1}$ существует тогда и только тогда, когда $m \le \begin{cases} \rho(n) \text{ при чётном } n; \\ \rho(n+1) \text{ при нечётном } n. \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eckmann B.* Gruppentheorischer Beweis des Satzes von Hurwitz - Radon über die Komposition quadratischer Formen // Comm. Math. Helv. 1942/43. Vol. 15, № 4. P. 358 - 366.

2. *Терёхин П.А.* Тригонометрические алгебры // Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 236 :Вопросы теории представлений алгебр и групп.5. СПб., 1997. С. 183 - 191.

УДК 518:517.948

Г. В. Хромова

О СКОРОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

Рассматривается уравнение 1 рода

$$Au = f, \tag{1}$$

где $u \in M_2^r[0,1] = \left\{ u \in W_2^r[0,1] : \|u\|_{W_2^r} \le 1, r \ge 1 \text{ - целое} \right\}$, $W_2^r[0,1]$ - пространство Соболева, $A \in (C^{(r-1)}[0,1] \to L_2[0,1])$ и является 1) оператором вложения из $C^{(r-1)}[0,1]$ в $L_2[0,1]$, либо 2) интегральным оператором с ядром Грина линейного обыкновенного дифференциального оператора L порядка m [1].

Пусть R_α - семейство операторов, соответствующих методу регуляризации Тихонова [2]

Обозначим $C_\varepsilon[0,1] = C[\varepsilon, 1-\varepsilon]$,

$$\Delta_{1,\varepsilon}^{(p)}(R_\alpha A,\ M_2^r)=\sup\ \left\{\ \| R_\alpha^{(p)} Au-u^{(p)}\|_{C_\varepsilon} : u\in M_2^r[0,1]\ \right\},$$

$$p=0,1,\ldots,r-1, \qquad R_\alpha^{(p)}\varphi=\frac{\partial^p}{\partial x^p}(R_\alpha\varphi).$$

При фиксированном p значение величины $\Delta_{1,\varepsilon}^{(p)}(R_\alpha A, M_2^r)$ представляет собой значение скорости аппроксимации p-й производной приближенного решения уравнения (1) в методе Тихонова.

Данное сообщение представляет уточнение результата из [1]: там для скорости аппроксимации приведены точные по порядку α оценки, здесь же мы получаем для этой величины асимптотически точное значение, т.е. решаем задачу Колмогорова-Никольского для операторов $R_\alpha A$ на классе $M_2^r[0,1]$.

ТЕОРЕМА. Справедливы представления:

$$\Delta_{1,\varepsilon}^{(p)}(R_\alpha A,\ M_2^r)=C\alpha^{\frac{2(r-p)-1}{4(m+r)}}+\beta(\rho), \qquad p=0,1,\ldots,r-1,$$

где $C=C_1+C_2$,

$$C_1=\frac{(-1)^{r+p+1}}{n}\sum_{i\in I_1}\omega_i^{2m+2p+1},\quad C_2=-\frac{2(-1)^{r+1}}{n^2}\sum_{i,\,j\in I_1}\frac{\omega_i^{p+1}\omega_j^{2m+p+1}}{\omega_i+\omega_j},$$

$\beta(\alpha)$ - функция, убывающая быстрее любой степени α, $n=2r$ в случае 1), $n=2r+2m$ в случае 2), остальные обозначения см. в [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о базируется на исследованиях, проведенных в работе [1]. Мы ограничимся здесь доказательством того, что $C\neq 0$. Покажем сначала, что $C_2\neq 0$. Обозначим сумму, стоящую в выражении для C_2, через C_3. Расположим корни ω_i, $i\in I_1$, в ином порядке, чем в [1]:

$$\tilde\omega_1=\gamma,\ \tilde\omega_2=\gamma e^{i\frac{2\pi}{n}},\ \tilde\omega_3=\gamma e^{i\frac{4\pi}{n}},\ \ldots,\ \tilde\omega_{\frac{n}{2}}=\gamma e^{i\frac{2\pi}{n}(\frac{n}{2}-1)},\ \text{где}\ \gamma=e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Рассмотрим функцию:

$$\Phi(\eta)=\sum_{i,\,j\in I_1}\tilde\omega_i^{\,p+1}\,\tilde\omega_j^{\,2m+p+1}\,e^{-\eta(\tilde\omega_i+\tilde\omega_j)}$$

на луче $\eta=te^{i\frac{\pi}{n}}$, $t>0$.

Тогда, очевидно, $\int\limits_0^\infty \Phi(\eta)d\eta=C_3$ и $\Phi(\eta)=\psi^{(p+1)}(\eta)\psi^{(2m+p+1)}(\eta)$, где $\psi(\eta)=\sum\limits_{i\in I_1}e^{-\eta\omega_i}$.

Отсюда имеем:

$$C_3 = \int_0^\infty \psi^{(p+1)}(\eta)\psi^{(2m+p+1)}(\eta)d\eta =$$

$$= [\psi^{(2m+p)}\psi^{(p+1)} - \psi^{(2m+p-1)}\psi^{(p+2)} + \dots + (-1)^{m-1}\psi^{(2m+p+1)}\psi^{(m+p)}]_0^1 +$$

$$+ (-1)^m \int_0^\infty [\psi^{(m+p+1)}(\eta)]^2 d\eta.$$

Поскольку $\psi^{(s)}(0) = 0$ при s - четном, то подстановки обращаются в ноль.

Перейдем к вещественной переменной t и учтем, что

$$\psi^{(k)}(\eta) = (-1)^k e^{-\frac{k\pi}{n}} \widetilde{\psi}^{(k)}(t).$$

Отсюда имеем:

$$C_3 = (-1)^m e^{-i\frac{\pi}{n}[2(m+p)+1]} \int_0^\infty \left|\widetilde{\psi}^{(m+p+1)}(t)\right|^2 dt \neq 0.$$

Из того, что $C_2 \neq 0$ следует, что и $C \neq 0$. Доказательство этого получается с привлечением фактов из теории уравнений 1 рода. Рассмотрим величину $\Delta_\varepsilon^{(p)}(\delta, R_\alpha, M_2^r) = \sup\left\{\left\| R_\alpha^{(p)} f_\delta - u^{(p)} \right\|_{C_\varepsilon} : u \in M_2^r, \left\| f_\delta - Au \right\|_{L_2} \leq \delta\right\}$, характеризующую погрешность приближенного решения уравнения (1) с приближенно заданной правой частью. Известно, что порядок по δ этой величины является оптимальным (наименьшим среди всех возможных приближенных методов решения уравнения (1)) при согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, имеющим порядок δ^2. [3]. Тот же оптимальный порядок получится, если $\alpha(\delta)$ выбирать из условия:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}\delta(-C_2)^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{2(r-p)-1}{4(m+r)}} + \widetilde{C}\alpha^{\frac{2(r-p)-1}{4(m+r)}} \to \inf_\alpha,$$

где $\widetilde{C}$ - константа, стоящая при "главном" порядке в асимптотике величины $\Delta_{1,\varepsilon}^{(p)}(R_\alpha A, M_2^r)$ [4]. В случае, если $C \neq 0$, то $\widetilde{C} = C$ и порядок по δ в согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$ будет δ^2. Если же $C = 0$, то мы придем к зависимости $\alpha(\delta)$, для которой порядок по δ величины $\Delta_\varepsilon^{(p)}(\delta, R_\alpha, M_2^r)$ будет меньше оптимального, что невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромова Г.В.* О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений I рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1994. № 4. С. 3 - 10.

2. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т.153, № 1. С. 49 - 52.

3. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложенйя. М.: Наука. 1978.

4. *Хромова Г.В.* Об оценках погрешности приближенных решений интегральных уравнений 1 рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1994. № 4. С. 3 - 10.

УДК 517.5

В. И. Шевцов

УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ОДНОМ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Дифференциальные уравнения бесконечного порядка используются во многих вопросах комплексного анализа. В создании теории таких уравнений большую роль сыграли работы Д. Полиа, Ж. Валирона, А.О. Гельфонда, А.Ф. Леонтьева и других математиков. Основной задачей теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка является задача аппроксимации любого решения такого уравнения посредством элементарных решений. В работе А.Ф. Леонтьева [1] имеется обзор по уравнениям бесконечного порядка. В монографиях [2, 3] приводится ряд результатов, относящихся к уравнениям бесконечного порядка и их приложениям.

Пусть $L(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^k$ - целая функция конечного порядка ρ, $0<\rho<1$. Предположим, что все нули функции $L(\lambda)$ - простые, обозначим их через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположив их в порядке неубывания их модулей. Рассмотрим на отрезке $[-1;1]$ систему функций $\left\{e^{\lambda_k x}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Такая система экспонент неполна в метрике C ни на каком отрезке вещественной оси.

Обозначим через C_{m_n} класс бесконечно дифференцируемых на $[-1;1]$ функций таких, что

$$\forall f\in C_{m_n},\ \forall n\ge 0\ \left|f^{(n)}(x)\right|<A_f m_n, \qquad (1)$$