СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромова Г.В.* О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений I рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1994. № 4. С. 3 - 10.

2. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т.153, № 1. С. 49 - 52.

3. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978.

4. *Хромова Г.В.* Об оценках погрешности приближенных решений интегральных уравнений 1 рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1994. № 4. С. 3 - 10.

УДК 517.5

В. И. Шевцов

УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ОДНОМ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Дифференциальные уравнения бесконечного порядка используются во многих вопросах комплексного анализа. В создании теории таких уравнений большую роль сыграли работы Д. Полиа, Ж. Валирона, А.О. Гельфонда, А.Ф. Леонтьева и других математиков. Основной задачей теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка является задача аппроксимации любого решения такого уравнения посредством элементарных решений. В работе А.Ф. Леонтьева [1] имеется обзор по уравнениям бесконечного порядка. В монографиях [2, 3] приводится ряд результатов, относящихся к уравнениям бесконечного порядка и их приложениям.

Пусть $L(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^k$ - целая функция конечного порядка ρ, $0<\rho<1$. Предположим, что все нули функции $L(\lambda)$ - простые, обозначим их через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположив их в порядке неубывания их модулей. Рассмотрим на отрезке $[-1;1]$ систему функций $\left\{e^{\lambda_k x}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Такая система экспонент неполна в метрике $\boldsymbol{C}$ ни на каком отрезке вещественной оси.

Обозначим через C_{m_n} класс бесконечно дифференцируемых на $[-1;1]$ функций таких, что

$$\forall f\in C_{m_n},\ \forall n\geq 0\ \left|f^{(n)}(x)\right|<A_f m_n, \tag{1}$$

где A_f - некоторая постоянная, которая зависит только от функции $f(x)$, m_n - последовательность неотрицательных чисел такая, что выполнено условие

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln m_n}{n \cdot \ln n} < \frac{1}{\rho}. \tag{2}$$

Отметим, что если $\alpha < 1$, то этот класс функций состоит из функций аналитических на отрезке $[-1;1]$. Если $\alpha = 1$, а $m_n = n^{\alpha n} \ln^{\alpha n} n$ и $\beta_n = \inf_{h\geq 0}(n+h)^{\alpha} \ln^{\alpha}(n+h) = n^{\alpha} \ln^{\alpha} n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} < \infty$, поэтому такой класс не квазианалитический. Если $\alpha = 1$, $m_n = n^n \ln^n n$, то такой класс квазианалитический, он содержит и не аналитические функции [4].

Обозначим, далее, через $C^*_{m_n}$ подкласс C_{m_n} такой, что любая $f \in C^*_{m_n}$ удовлетворяет уравнению бесконечного порядка:

$$M_L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x) = 0, \quad x \in [-1;1], \tag{3}$$

характеристическая функция которого $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ является целой функцией порядка ρ, $0 < \rho < 1$. В работе [6] показано, что класс $\mathrm{C}^*_{\mathrm{m_n}}$ - квазианалитический. В [6] построена система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - биортогональная к системе экспонент $\{e^{\lambda_K x}\}_{k=1}^{\infty}$ на $[-1;1]$. Функции $f \in C_{m_n}$ приведем в соответствие ряд экспонент по данной биортогональной системе функций

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_K x}, \qquad A_k = \int_{-1}^{1} f(t)\varphi_k(t)dt \tag{4}$$

В исследованиях по теории рядов экспонент важное значение имеет интерполирующая функция, которую ввел А.Ф. Леонтьев. Она имеет следующий вид:

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[f^{(k-1)}(0) + \mu f^{(k-2)}(0) + \ldots + \mu^{k-1} f(0) \right].$$

Если $f \in C_{m_n}$, то $\omega_L(\mu, F)$ - целая функция комплексного переменного μ. Функции $f(x) \in C_{m_n}$ приведем в соответствие ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\lambda_K x}, \quad B_k = \frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{L'(\lambda_k)}. \tag{5}$$

В данной статье излагаются результаты, относящиеся к исследованию поведения рядов (4) и (5).

Сформулируем следующую теорему

ТЕОРЕМА 1. Если $f(x) \in C^*_{m_n}$, то $\forall n \; A_n = B_n$.

Доказательство данной теоремы опирается в основном на то, что класс $C^*_{m_n}$ - квазианалитический. Укажем также на теорему, которая получается непосредственным применением теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda_n > 0$ и выполнено условие $\exists h$, $0 < h < 1$, такое, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n^h} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} < \infty .$$

Если $f(x) \in C^*_{m_n}$, тогда $f(x)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1$ и в этой полуплоскости

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_K z} .$$

Рассмотрим теперь следующую систему уравнений бесконечного порядка

$$M_L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x) = 0 ,$$

$$M_{L_1}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k f^{(k)}(x) = 0 , \quad x \in [-1;1] \tag{6}$$

Характеристические функции этой системы функций $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ и $L_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k$ - целые функции порядка ρ, $0 < \rho < 1$. Как и выше предполагается, что все нули характеристических функций – простые. Справедлива теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если характеристические функции системы (6) не имеют общих нулей, то единственным решением системы (6) является $f(x) \equiv 0$.

Нами также исследована структура решений системы (6) при условии, что характеристические функции имеют общие нули. Обозначим через $\{ \mu_k \}$ - общие нули функций $L(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 4. Существует последовательность $r_k \uparrow \infty$ такая, что если $f(x)$ удовлетворяет системе (6), то

$$f = \lim_{k\to\infty} \sum_{|\mu_S|<r_K} \widetilde{A}_s e^{\mu_S x}, \quad \widetilde{A}_s = \frac{\omega_L(\mu_s, F)}{L'(\mu_s)}$$

равномерно на $[-1;\, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А.Ф.* Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и их применение // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. 1964. Т. 2. С. 648 - 660.

2. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М., 1976.

3. *Леонтьев А.Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М., 1960.

4. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. М.; Л., 1937.

5. *Шевцов В.И.* Свойства специального класса бесконечно дифференцируемых функций // Теория функций и приближений :Тр. 4-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1990. Ч. 3.

6. *Шевцов В.И.* Об одном классе бесконечно дифференцируемых функций.// Теория функций и приближений :Тр. 6-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1992.

7. *Леонтьев А.Ф.* Обобщение рядов экспонент. М., 1980.